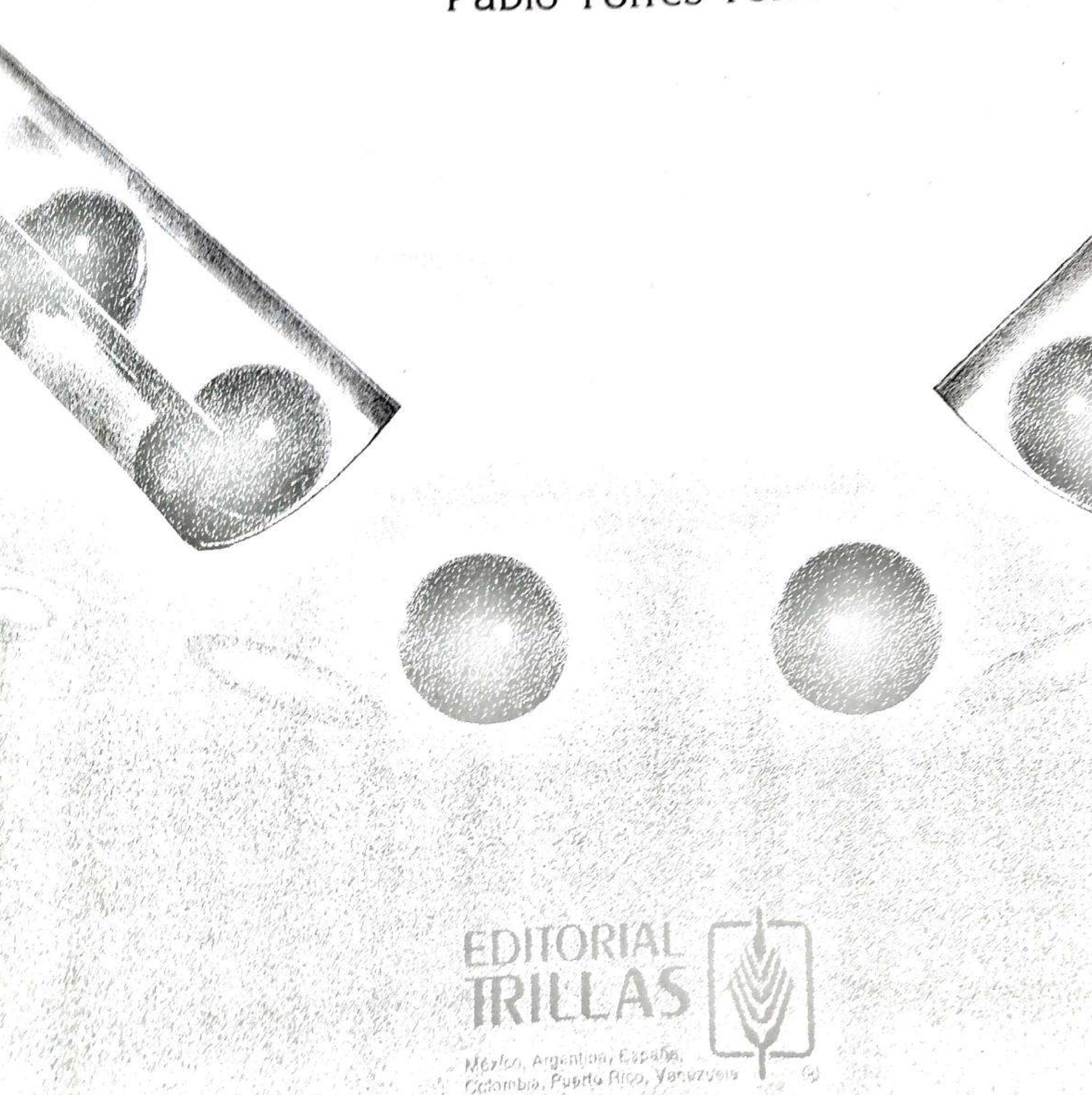
ELEMENTOS DE FÍSICA MODERNA

Américo Peraza Álvarez
Pablo Torres Tonche



EDITORIAL TRILLAS
México, Argentina, España,
Colombia, Puerto Rico, Venezuela

Catalogación en la fuente

Peraza Álvarez, Américo
Elementos de física moderna. -- México : Trillas, 2008.
316 p. : il. ; 24 cm.
Incluye índices
ISBN 978-968-24-8058-4

1. Física - Estudio y enseñanza. 2. Cuántica, Teoría.
3. Física nuclear. I. Torres Tonche, Pablo. II. t.

D- 538.7'P565e LC- QC776'P4.4

División Administrativa
Av. Río Churubusco 385
Col. Pedro María Anaya, C.P. 03340
México, D. F.
Tel. 56 88 42 33, FAX 56 04 13 64

División Comercial
Calzada de la Viga 1132
C.P. 09439 México, D. F.
Tel. 56 33 09 95
FAX 56 33 08 70

www.trillas.com.mx

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Reg. núm. 158

Primera edición, enero 2008*
ISBN 978-968-24-8058-4

Impreso en México
Printed in Mexico

Esta obra se terminó de imprimir el 5 de enero del 2008, en los talleres de Colores Impresos. Se encuadernó en Encuadernaciones y Acabados Gráficos.

AO 75 TW

Prólogo

El libro de texto que se presenta a continuación es producto de varios semestres de enseñanza en la Universidad de Guadalajara. Los materiales analizados en esta edición corresponden a las asignaturas de Física Moderna Básica para ingenieros y Física Moderna para físicos, impartidas en el Departamento de Física del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara. La necesidad de escribir esta obra obedeció a que no existe un texto de Física Moderna en el mercado que sirva de guía al cursar dicha asignatura y que a la vez refleje las condiciones particulares del plan de estudios vigente en las licenciaturas en Física y de ingenierías en nuestras universidades. De esta manera, los temas aquí tratados satisfacen las exigencias sobre la materia en instituciones y centros de enseñanza superior. A juicio de los autores, esta obra puede ser recomendada como libro de texto y como material de apoyo y consulta a estudiantes de ingenierías en Comunicaciones y Electrónica, de Mecánica Eléctrica y de Física. Para estos últimos, es de especial interés el desarrollo metodológico de los conceptos esenciales de la Física clásica y el surgimiento de los nuevos conceptos de la Física Moderna.

En términos generales, los temas aquí tratados ilustran sobre el desarrollo de aquellas ramas de la Física que condujeron históricamente al replanteamiento de los cimientos de dicha ciencia, tales como el problema del éter y los sistemas de referencia, la radiación electromagnética, la radiación del cuerpo negro y la Hipótesis de Planck, el principio corpuscular ondulatorio de la materia, las series espectrales y la Teoría de Bohr, el planteamiento de la ecuación de Schrödinger y la interpretación de sus soluciones. Los pilares básicos de la Física Moderna que se muestran corresponden al tratamiento relativista y cuántico de la materia.

La Física Moderna como asignatura cumple dos funciones que pueden complementarse entre sí, a saber:

1. Sirve como puente entre los conceptos de la Física clásica y los conceptos propios de las teorías relativista y cuántica. A menudo, en los programas de la Licenciatura en Física suelen encontrarse asignaturas de corte clásico, relativista o cuántico. Entretanto, la internalización del conocimiento es gradual por lo regular.

2. Es informativa y formativa terminal para algunos programas de Física e ingenierías. Esto tiene que ver, sobre todo, con la cada vez más común tendencia a la flexibilización de los programas. Por ello, los temas centrales y conceptos básicos son tratados de manera amplia en este curso.

Para la impartición de los materiales que conforman el curso, se sugiere la enseñanza de los primeros cuatro capítulos en orden arbitrario; sin embargo, a partir del capítulo 5, debe conservarse rigurosamente el orden establecido. Al final de las secciones 1.2, 1.9, 1.10, 1.11, 3.4, 3.9, 4.3, 4.6, 5.11, 7.7, 7.10, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8, 8.9, 8.10 y 8.11, se han reproducido algunos ejemplos resueltos cuya finalidad es mostrar sencillas aplicaciones de las principales fórmulas y leyes analizadas en las secciones respectivas. En algunos casos, seguido de los ejemplos van algunos ejercicios con sus correspondientes respuestas, y se espera que el estudiante los resuelva inspirándose en los ejemplos. Por otro lado, los capítulos 1 y 8 han sido dotados de varios apéndices en los que se muestran cálculos exhaustivos, los cuales sirven para confirmar algunos resultados utilizados en el texto, sin restarle claridad a éste. Al final de los capítulos 1, 3, 5, 7 y 8 se plantea una serie de problemas cuya solución exige una comprensión más profunda de los tópicos tratados. La resolución de estos problemas se recomienda, sobre todo, a los estudiantes de Física. Los primeros tres problemas han sido dotados de las correspondientes guías de solución, lo cual se espera sirva como estímulo para que el estudiante realice los cálculos propuestos. Además, se incluyen figuras ilustrativas y tablas en los lugares correspondientes del texto, para una mejor comprensión de los materiales.

La bibliografía a que se hace referencia o que se aconseja estudiar para adquirir un conocimiento más amplio del concepto tratado, es señalada por un número en un corchete en el texto mismo, de manera que el número indica el orden de aparición exclusivamente. En este mismo orden se muestra la relación bibliográfica al final del libro.

Desde luego, en opinión de los autores, este curso está lejos de agotar todos los materiales que hoy son tratados por la Física Moderna. De ahí el título que lleva el curso. El último capítulo de los materiales presentados está enfocado al planteamiento de la ecuación de Schrödinger y al estudio de sus propiedades más generales. En nuestra opinión, las generalizaciones relativistas de dicha ecuación, así como el estudio de los principios de la relatividad general, de la cosmología y de otras teorías alternas, muy bien pueden conformar el contenido del segundo volumen de esta obra.

AMÉRICO PERAZA ÁLVAREZ,[1] PABLO TORRES TONCHE[2]
Guadalajara, Jalisco, México

[1] americo.peraza@red.cucei.udg.mx
[2] pttonche@yahoo.com.mx

Nota al lector

El curso que estás a punto de iniciar te ayudará a comprender los conceptos sobre los que descansa el edificio de la Física Moderna (fig. N.1). Para esto, basta con leer las primeras páginas de cada tema para tener las nociones mínimas sobre el tópico tratado. Luego, puedes hacer una lectura completa del tema que te interese. Con esto tendrás un panorama más amplio del tópico en cuestión, sobre todo, si consideras lo leído y lo ubicas en el mapa conceptual de la figura N.1.

No obstante, si te interesa adquirir la herramienta matemática y físico conceptual de los temas aquí tratados, es menester que analices los ejemplos resueltos y verifiques por ti mismo los cálculos mostrados. Dichos ejemplos los encontrarás al final del desarrollo de los temas principales. Por otro lado, puedes profundizar tus conocimientos adquiridos si además resuelves los ejercicios propuestos después de los ejemplos. Para ello, si al primer intento no obtienes el resultado numérico mostrado entre corchetes, ¡no te desanimes!; seguramente basta que revises con cuidado tus cálculos y asocies las unidades de las cantidades involucradas a un mismo sistema de unidades. En un segundo intento te aconsejamos corroborar si estás utilizando la forma correcta de las expresiones y ecuaciones que se asocian con el tema tratado en el ejercicio.

A los estudiantes de Física les sugerimos resolver los problemas listados al final de cada capítulo. Para esto, es recomendable usar las guías de solución propuestas en los primeros tres problemas, para adquirir cierta destreza en el manejo de la herramienta matemática y en la aplicación de los conceptos físicos involucrados. Es importante que sepas que los problemas propuestos y cuyos resultados son mostrados en corchetes, son un reto a tu imaginación e intuición desarrolladas en este curso.

Por otro lado, algunos cálculos se han reproducido en los apéndices respectivos de los capítulos primero y último. Consideramos que su ausencia del texto principal no afecta la comprensión de los tópicos tratados. No obstante, al lector curioso le recomendamos su análisis.

Como quiera que sea, esperamos que tu paso por la Física Moderna sea agradable y lleno de insólitas vivencias que compartas con tus compañeros y maestros y, por qué no, con los autores de este material.

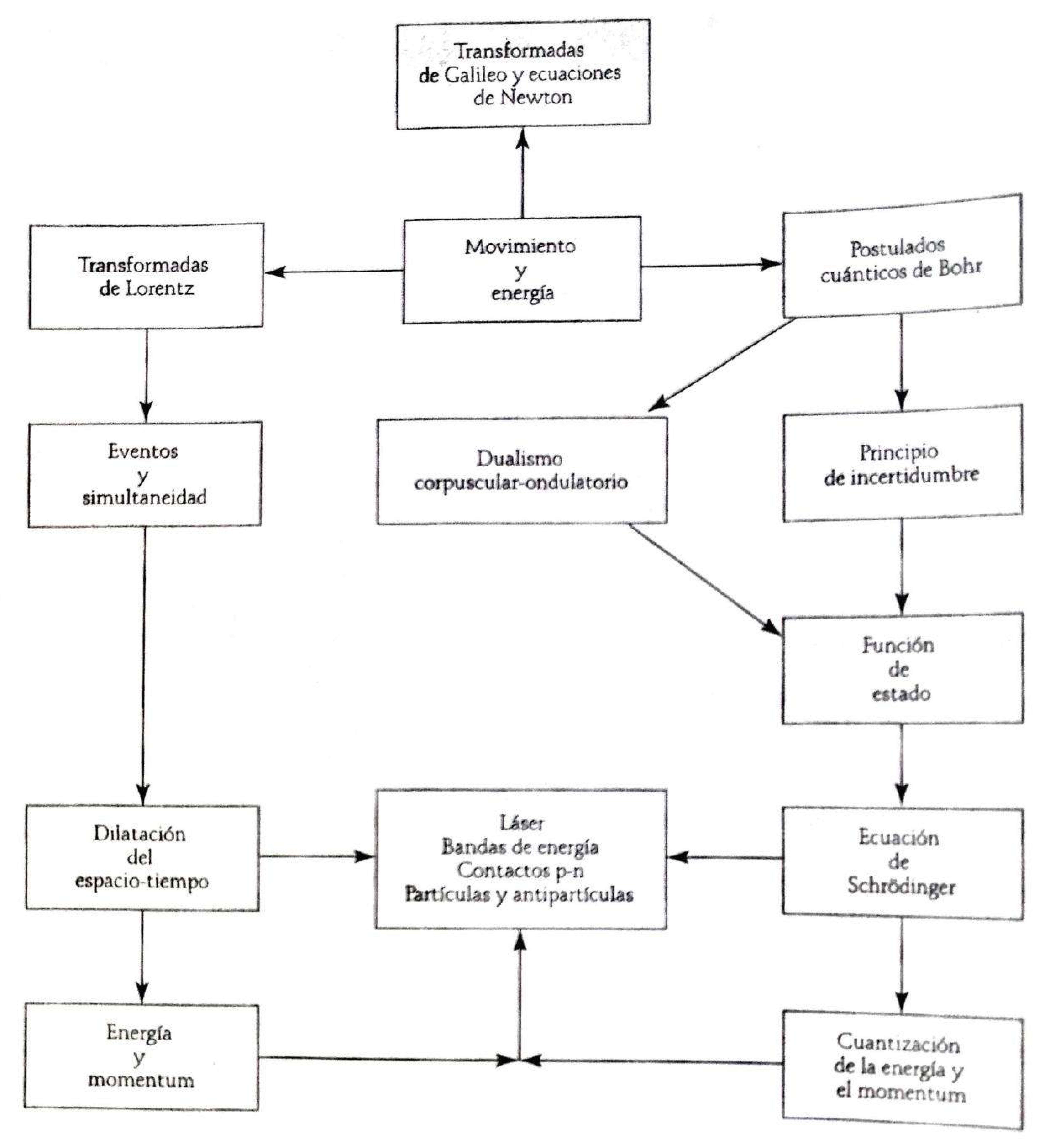


Figura N.1. Mapa conceptual para *Elementos de Física Moderna.*

Índice de contenido

Prólogo 5
Nota al lector 7

Cap. 1. Teoría especial de la relatividad 11

1.1. Introducción, 11. **1.2.** El principio relativista de Galileo y la hipótesis del éter, 12. **1.3.** Experimento para descubrir el *viento etéreo*, 17. **1.4.** Hipótesis de Fitzgerald y de Lorentz, 21. **1.5.** Postulados de la teoría de la relatividad, 23. **1.6.** Invarianza y covarianza, 24. **1.7.** Propiedades generales del espacio-tiempo, 25. **1.8.** Transformadas de Lorentz, 28. **1.9.** Consecuencias generales de las transformadas de Lorentz, 29. **1.10.** Relatividad de la masa, 45. **1.11.** Algunas expresiones de la mecánica relativista, 51. **1.12.** Intervalos, 56. **1.13.** Ley de la relación mutua entre la masa y la energía, 57. Apéndice A. Deducción de las transformadas de Lorentz-Einstein, 62. Apéndice B. Otra forma de obtener $m = m(v)$, 67. Apéndice C. Relaciones útiles para la forma vectorial de la suma relativista de las velocidades, 73. Problemas, 74.

Cap. 2. Teoría clásica de la radiación electromagnética 79

2.1. El oscilador lineal armónico, 79. **2.2.** Centros de emisión elementales de luz, 84. **2.3.** Radiación electromagnética del oscilador lineal, 85. **2.4.** Radiación total y media de un oscilador, 89. **2.5.** Espectro electromagnético de un oscilador no armónico, 91. **2.6.** Amortiguamiento de las oscilaciones, 93. **2.7.** Fricción luminosa, 95.

Cap. 3. Radiación del cuerpo absolutamente negro 100

3.1. La física clásica y el problema de la radiación térmica, 100. **3.2.** Radiación de equilibrio en una cavidad, 104. **3.3.** Ley de Kirchhoff, 107. **3.4.** Leyes de la radiación del cuerpo absolutamente negro, 109. **3.5.** Teorema de la equipartición de la energía, 113. **3.6.** Fórmula de Rayleigh-Jeans, 116. **3.7.** Catástrofe ultravioleta, 122. **3.8.** Fórmula de Planck, 123. **3.9.** Hipótesis sobre los cuantos de energía, 125. **3.10.** Ley de Stefan-Boltzmann, 130. Problemas, 133.

Cap. 4. Propiedades corpusculares de las ondas **136**
4.1. Teoría clásica de la radiación del electrón y sus límites, 136. **4.2.** Efecto fotoeléctrico, 141. **4.3.** Fórmula de Einstein y su comprobación, 144. **4.4.** Algunas aplicaciones del efecto fotoeléctrico, 148. **4.5.** Difusión de los rayos X, 150. **4.6.** Efecto Compton, 153.

Cap. 5. Propiedades ondulatorias de las partículas **159**
5.1. La onda monocromática plana en un medio homogéneo, 160. **5.2.** Ecuación de onda, 162. **5.3.** El paquete de onda, 167. **5.4.** Velocidad de fase y velocidad de grupo, 171. **5.5.** El dualismo corpuscular ondulatorio, 173. **5.6.** Hipótesis de De Broglie, 175. **5.7.** Propiedades de las ondas broglianas, 176. **5.8.** Comprobación experimental de la hipótesis de De Broglie, 178. **5.9.** El paquete de onda y la partícula, 179. **5.10.** Enfoque estadístico de las ondas de De Broglie, 181. **5.11.** Relaciones de incertidumbre, 183. Problemas, 188.

Cap. 6. Estructura atómica y dispersión de partículas alfa **190**
6.1. Modelos atómicos, 190. **6.2.** Problema de Kepler, 193. **6.3.** La partícula alfa en el campo del núcleo, 199. **6.4.** Dispersión de partículas alfa, 202. **6.5.** Comprobación experimental de la fórmula de Rutherford, 206. **6.6.** Dimensiones nucleares, 209. **6.7.** Órbitas electrónicas, 210.

Cap. 7. Espectros atómicos y niveles energéticos de los átomos. Teoría de Bohr **215**
7.1. Introducción, 215. **7.2.** Serie de Balmer, 217. **7.3.** Series de Lyman, Paschen y otros, 220. **7.4.** Modelo planetario del átomo. Postulados cuánticos de Bohr, 222. **7.5.** Términos espectrales y principio combinatorio, 223. **7.6.** Cuantización de las órbitas circulares, 225. **7.7.** Teoría de Bohr, 228. **7.8.** Serie de Pickering para iones hidrogenoides, 234. **7.9.** Diagrama de los niveles de energía, 237. **7.10.** Límite espectral continuo del hidrógeno, 239. **7.11.** Cuantización del átomo de hidrógeno según Bohr-Sommerfeld, 243. **7.12.** Principio de correspondencia, 253. **7.13.** Problemas de la teoría de Bohr, 258. Problemas, 259.

Cap. 8. Ecuación de Schrödinger **261**
8.1. Ecuación estacionaria de Schrödinger, 261. **8.2.** Funciones de onda. Funciones propias y valores propios, 263. **8.3.** La partícula en una caja potencial, 266. **8.4.** Movimiento de partículas libres, 271. **8.5.** Ecuación general de Schrödinger. Operadores de energía y momentum, 275. **8.6.** Operadores de cantidades físicas, 278. **8.7.** Funciones propias y valores propios de los operadores, 281. **8.8.** Ecuación de Schrödinger en diferentes sistemas de coordenadas, 286. **8.9.** Movimiento de una partícula en un campo con simetría central, 288. **8.10.** Consecuencias de la cuantización de $\hat{L}$, 296. **8.11.** Spin del electrón, 299. Apéndice A. Ejemplo de paquete de onda, 303. Apéndice B. Operadores de momentum angular en coordenadas esféricas, 305. Problemas, 306.

Tablas **313**
Referencias bibliográficas **315**

1

Teoría especial de la relatividad

Fue Einstein quien introdujo el verdadero problema al anunciar en 1905 que no existía tal cosa como el reposo absoluto. Después ya nunca lo hubo.

STEPHEN LEACOCK

1.1. INTRODUCCIÓN

El presente curso dará inicio con una breve exposición de la situación histórica por la que atravesó la física hacia fines del siglo XIX.

Por esos años las respetables ideas de la física clásica ya habían sufrido serios reveses, entre los que se cuenta la pérdida de confiabilidad en la teoría corpuscular de la luz. Esto se debió en su mayor parte a que la teoría ondulatoria recibió un fuerte impulso gracias a la comprobación experimental de la naturaleza electromagnética de la luz [1]. Además, no eran explicados satisfactoriamente algunos fenómenos, como:

- *El efecto fotoeléctrico.*
- *La estabilidad del átomo.* Debido al movimiento de los electrones alrededor del núcleo atómico, debe presentarse una emisión continua de energía de modo que con el transcurso del tiempo el electrón se acerca lo suficiente al núcleo como para ser absorbido por éste, lo que conduciría al colapso del átomo. Esta última situación no se observa.
- *El corrimiento del perihelio del planeta Mercurio.* El perihelio es la posición más alejada de un planeta en su órbita alrededor del Sol. Por cada 100 años transcurridos se presenta un corrimiento del perihelio de 40'' de arco, sin explicación alguna en la teoría clásica.
- *Las transformaciones o equivalencias energéticas de la masa y su significado.*
- *La radiación del cuerpo absolutamente negro*, entre otros.

Así pues, la aplicación indiscriminada de los principios de la física clásica a todos los fenómenos observados condujo a una situación crítica en que era cuestionada incluso la existencia de la realidad objetiva [2].

Para resolver esta situación fue necesario hacer una revisión exhaustiva de los marcos de aplicación de los postulados fundamentales de la teoría clásica y generalizarlos de manera que tuviese lugar el principio de correspondencia; es decir, que en el caso límite de la teoría nueva se obtuviesen los resultados clásicos.

En consecuencia, surgieron dos nuevas teorías, las cuales marcaron el desarrollo de la física en dos grandes direcciones:

- *La física cuántica, que estudia los fenómenos que suceden en la estructura atómica y su interrelación con las partículas elementales.*
- *La física relativista, cuyo principal objetivo es el análisis de los fenómenos que suceden a grandes velocidades, observados desde diferentes sistemas inerciales de referencia (SIR).*

Este capítulo se dedicará al estudio de la teoría especial de la relatividad, que surge del análisis de las consecuencias físicas que implicaba la inexistencia total de un sistema inercial absoluto de referencia y que fue desarrollada por el célebre físico alemán Albert Einstein, en un artículo publicado en 1905 [3]. Además, esta teoría dio las bases para el estudio de la física relativista.

Como ya se especificó, la teoría especial de la relatividad trata los problemas relacionados con los cambios de las magnitudes y los fenómenos físicos observados desde distintos SIR, los cuales se definen de acuerdo con la primera ley de Newton. Esto mismo se refleja a la vez, en algunas concepciones filosóficas [4].

Para comenzar el análisis de estos problemas, es necesario apoyarse en la mecánica, ya que en el desarrollo de ésta se formaron los conceptos de espacio-tiempo de la humanidad.

Este desarrollo de la mecánica afirma la total equivalencia de todos los SIR, lo cual se refleja en el conocido principio relativista de Galileo.

1.2. EL PRINCIPIO RELATIVISTA DE GALILEO Y LA HIPÓTESIS DEL ÉTER

El principio referido se apoya en **dos postulados fundamentales**:

a) *El tiempo es absoluto; es decir, único para todos los SIR.*
b) *Las velocidades se suman como vectores euclidianos, es decir, se postula que el espacio es euclidiano.*

De estos postulados surgen las conocidas transformaciones de Galileo, que relacionan entre sí las coordenadas de dos SIR.

Sea que S' es un SIR que se desplaza respecto de otro SIR S con una velocidad constante y movimiento uniformemente rectilíneo. Veamos un objeto puntual[1] que se desplaza en S' y cuyo vector de posición es $\vec{r}'$.

[1] Un objeto puntual es aquel cuyas dimensiones no importan o se les puede ignorar en el efecto estudiado.

Si se considera que en ambos sistemas los ejes de coordenadas (cartesianas) son paralelos y sus orígenes coinciden en el momento de tiempo $t = 0$, se tiene que

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t, \quad t' = t \tag{1.1}$$

o si se dirige el eje x en dirección de la velocidad $\vec{v}$:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \tag{1.2}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición del objeto puntual respecto de S (fig. 1.1). No es difícil observar que las transformadas de Galileo (1.2) son consecuencia directa de la relación $t' = t$, la cual expresa el carácter absoluto del tiempo, y de la **ley de la suma de velocidades**:

$$\vec{u}\,' = \vec{u} - \vec{v} \tag{1.3}$$

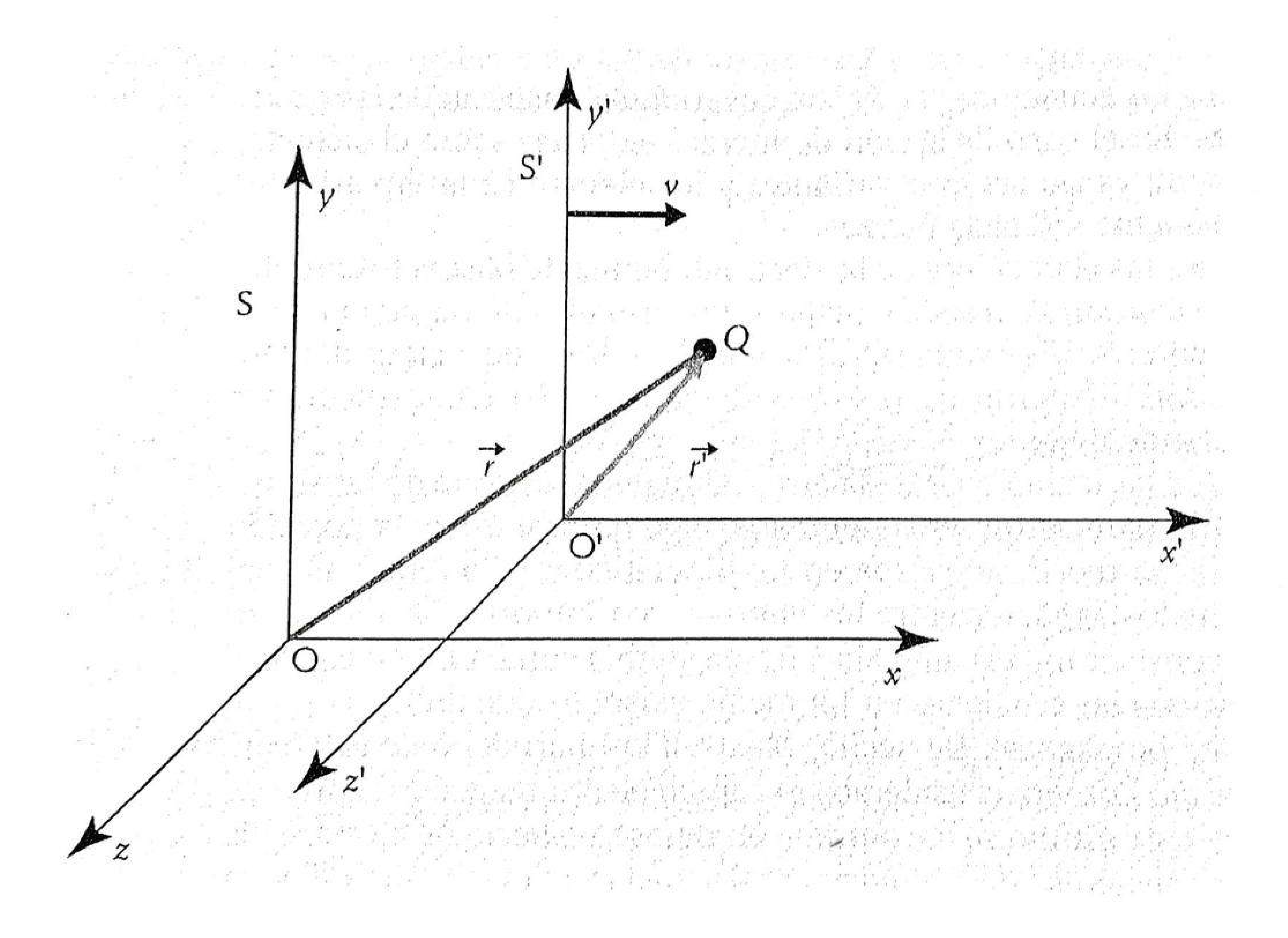


Figura 1.1. Apreciación de dos SIR S y S': el punto Q está asociado al sistema S', que se desplaza respecto de S con una velocidad constante v.

donde $\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ y $\vec{u}\,' = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$, o en componentes cartesianas:

$$u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z \tag{1.4}$$

siendo $u_x = \frac{dx}{dt}$ y $u_x' = \frac{dx'}{dt'}$ las velocidades del punto material medidas en los sistemas S y S' respectivamente, obtenidas mediante diferenciación temporal de la expresión (1.2).

Ahora será analizada la segunda ley de Newton para un sistema cerrado de puntos materiales con masas m entre los cuales actúan fuerzas, $\vec{F}_{ik}(i \neq k)$ que dependen de las distancias relativas entre éstos; es decir,

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik}(\vec{r}_k - \vec{r}_i) \tag{1.5}$$

Puesto que

$$\frac{d^2\vec{r}_i'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}, \quad \vec{r}_i - \vec{r}_k = \vec{r}_i' - \vec{r}_k' \tag{1.6}$$

entonces se observa que las ecuaciones (1.5) son covariantes[2] respecto de las transformadas mencionadas. En el caso de acción de fuerzas externas sobre el sistema, las ecuaciones de Newton ya no serán covariantes y los elementos no invariantes corresponderán precisamente a dichas fuerzas.

En lo que respecta a las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell-Lorentz, éstas resultaron ser no covariantes respecto de las transformadas de Galileo (1.2), y todos los intentos por obtener la covarianza deseada al cambiar de alguna manera las ecuaciones, resultaron infructuosos, pues conducían a serias contradicciones con los resultados experimentales.

La no covarianza de las ecuaciones de la electrodinámica respecto de las transformadas de Galileo (1.2) parecieron ser sin embargo algo natural desde la posición de la **teoría del éter**. Dicha teoría se basaba en un hipotético medio (éter), el cual *ocupaba* uniformemente los espacios entre los cuerpos, sin importar las dimensiones de éstos; además, consideraba el campo electromagnético como un tipo especial de tensión (en analogía con las tensiones en un medio elástico) que utilizaba precisamente este medio para propagarse. De hecho, Maxwell era partidario de esta concepción e incluso el mismo Lorentz consideraba el campo electromagnético como un estado especial del éter. Este último se encontraba en reposo respecto de cierto sistema inercial privilegiado (absoluto) de referencia, es decir, el movimiento de todos los demás sistemas de referencia se realizaba respecto de éste, en virtud de encontrarse en reposo en relación con todos los demás.

De aceptarse la existencia del éter electromagnético, entonces es obvio que las ecuaciones de Maxwell-Lorentz son justas sólo en un sistema de referencia único, relacionado con el éter. En cualquier otro sistema de referencia, el éter se encontrará en movimiento, lo cual a la vez deberá reflejarse en las ecuaciones del campo. Dicho de otro modo, en cualquier teoría etérea se presupone la existencia del *viento etéreo*, lo cual significa que en las ecuaciones del campo deberá contenerse la velocidad del sistema de referencia analizado en calidad de parámetro respecto del éter.

[2] La covarianza de una ecuación indica que ésta no cambia de forma al aplicar una transformación dada (véase la sección 1.6. "Invarianza y covarianza").

Así pues, la concepción del éter es incompatible con el principio relativista de Galileo. Para cerciorarse de ello, deberá ser realizado el siguiente experimento.

Sea que una onda electromagnética es producida por una fuente puntual de luz en el momento de tiempo $t = 0$. Es necesario aclarar cómo se observa su expansión en dos sistemas inerciales de referencia, que se mueven uno respecto del otro con velocidad $\vec{v}$, la cual de aquí en adelante será denominada **velocidad relativa**. Supóngase que el sistema S está fijo al éter y que el sistema S' se desplaza uniformemente por el eje de las x con velocidad $\vec{v}$, de manera que en el momento de tiempo $t = T > 0$ la onda luminosa alcanza los puntos distribuidos en la superficie de una esfera de radio $R = cT$ trazado desde el origen de coordenadas (esto último debido a la suposición de que la fuente se encuentra en el origen de coordenadas del sistema S).

De esta manera, en S la ecuación del frente de onda tiene la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2T^2 = 0 \quad (1.7)$$

Sin embargo, en S' y en el momento $t' = T' \equiv T$ la posición de la fuente se habrá desplazado por el eje de las x en un segmento $-vT$ y la ecuación de la misma superficie de onda toma la forma (fig. 1.2):

$$(x' + vT)^2 + y' + z' - c^2T^2 = 0 \quad (1.8)$$

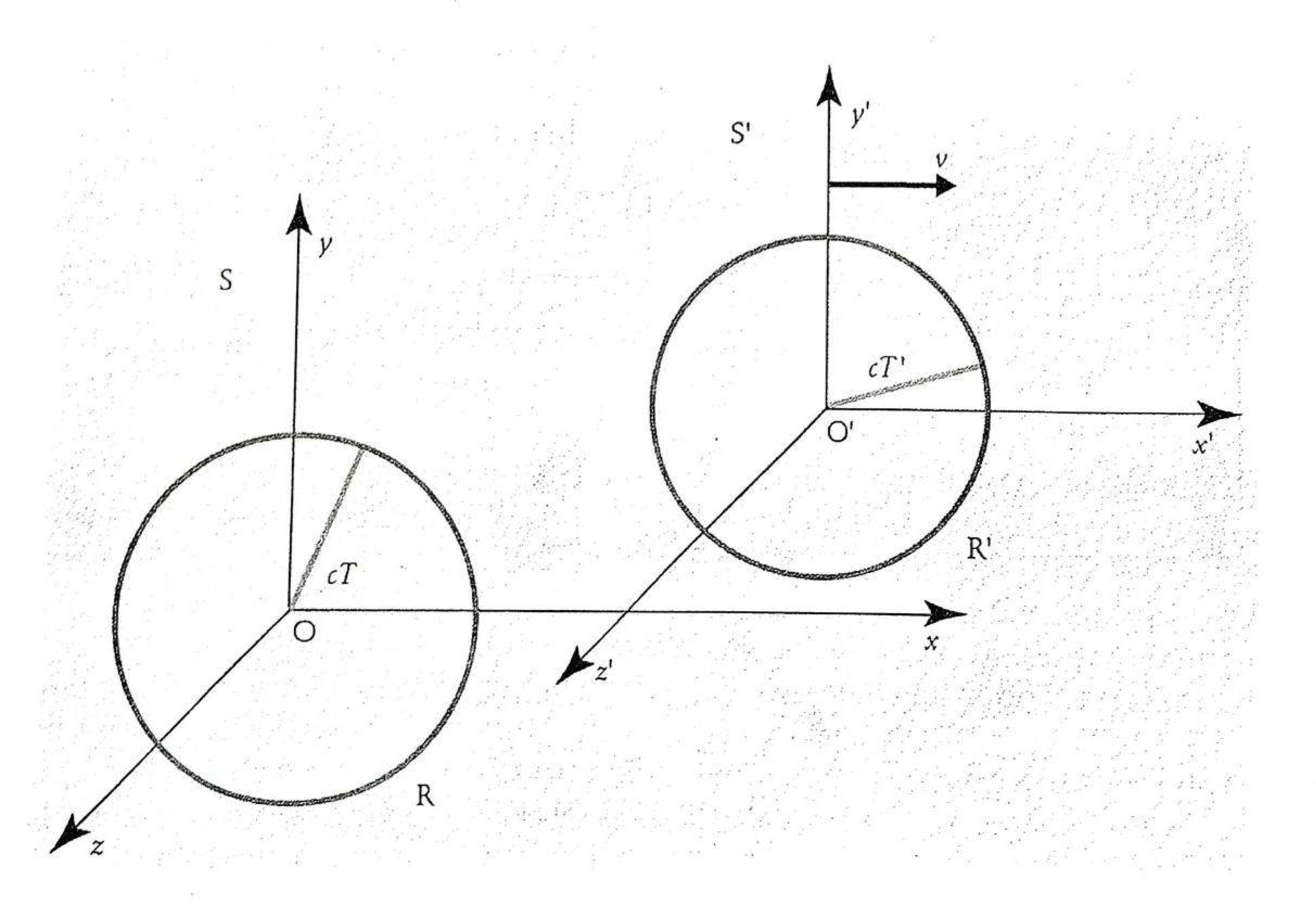


Figura 1.2. Propagación de un frente de onda observado desde dos SIR S y S'. Se observan iguales, pero se describen de forma diferente.

De esta manera, en S y S' la ecuación de un mismo frente de onda es diferente. Pero como es bien conocido desde el curso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, la superficie de onda es una ecuación característica y su forma está determinada sólo por los coeficientes de las correspondientes ecuaciones.

Por eso, las ecuaciones del campo electromagnético de cuya solución se obtienen los correspondientes frentes de onda (1.7) y (1.8) deben también ser diferentes, lo cual habla de su no covarianza.

Y así, la concepción *etérea* del campo electromagnético contradice el principio relativista de Galileo y acepta la posibilidad del descubrimiento experimental del **viento etéreo.** A fines del siglo XIX fueron realizados varios experimentos con ese fin. De entre ellos será escogido el más ilustrativo.

Ejemplo 1.2.1

Un autobús se desplaza con una velocidad de 45 km/h respecto de un peatón parado en la acera. En el autobús, un pasajero P se dirige hacia atrás con una velocidad de 2 km/h. Encuentre la velocidad de P respecto del peatón.

Solución. De acuerdo con las transformadas de Galileo, elijamos el SIR S, de modo que la coordenada x indique la dirección de movimiento del autobús, y coloquemos en el origen O al peatón (de hecho, el peatón puede estar en cualquier posición x). Entonces, se fija el SIR S' al autobús (fig. 1.3).

Según la regla de transformación de las velocidades (1.3), $\vec{u}'$ es la velocidad de la persona en S' (en el autobús), por tanto:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v},$$

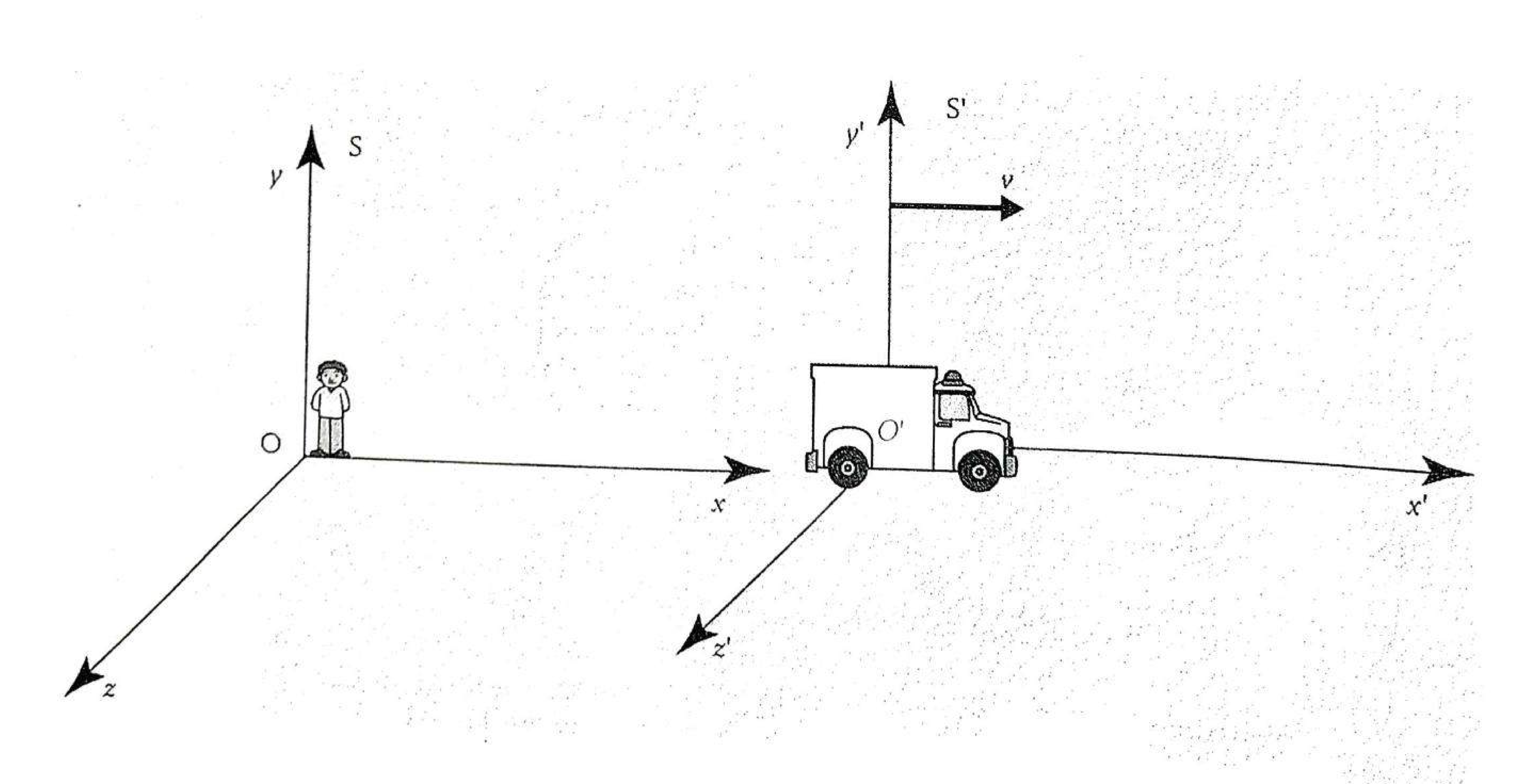


Figura 1.3. El sistema de referencia S' se fija al autobús, de modo que ambos se mueven juntos respecto del sistema de referencia S. Este último está asociado al peatón-observador, y ambos forman el sistema de referencia en reposo S.

de donde al despejar $\vec{u}$ se encuentra que

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v},$$

o bien, ya que todas las velocidades están dirigidas en x, denotando el vector unitario en la dirección x como $\hat{x}$, se tiene:

$$\vec{u} = \hat{x}u, \quad \vec{u}' = \hat{x}u' \ \text{ y } \ \vec{v} = \hat{x}v,$$

entonces, se tiene que

$$u = u' = v \tag{1.9}$$

En esta última ecuación, u es la cantidad buscada. La magnitud de la velocidad de la persona respecto del autobús es $u' = -2$ km/h y la velocidad del autobús es $v = 45$ km/h. Entonces, sustituyendo valores en (1.9), se tiene finalmente que

$$u = (-2 + 45) \text{ km/h} = 43 \text{ km/h}$$

Ejercicio 1.2.1

En el ejemplo anterior suponga que el autobús mencionado y un ciclista (cuya velocidad es de 15 km/h y que se mueve en la misma dirección que el autobús) pasan frente al peatón en el mismo instante de tiempo. Calcular:

a) La velocidad del pasajero P respecto del ciclista.
b) La posición del ciclista respecto del peatón luego de 6 s.
c) La posición del autobús respecto del ciclista luego de 6 s.

Solución: *a*) 28 km/h; *b*) 25 m; *c*) 50 m.

1.3. EXPERIMENTO PARA DESCUBRIR EL *VIENTO ETÉREO*

La posibilidad de descubrir el movimiento respecto del éter comenzó a tratarse ya en la primera mitad del siglo XIX; es decir, antes de que Maxwell publicara la teoría electromagnética de la luz [5]. Este problema surgió en óptica, en la que, por esos tiempos la teoría corpuscular estaba siendo desplazada por la concepción ondulatoria de Huygens-Fresnel. De acuerdo con esta última, la luz se plantea como una perturbación en el éter, que se propaga en él a semejanza de las ondas elásticas en un cuerpo sólido.

De los experimentos realizados para demostrar la concepción etérea, sólo será analizado el **experimento de Michelson-Morley**.

Este experimento se realizó por primera vez en 1881, después de lo cual se repitió en 1887 y 1904-1905. Las mediciones fueron llevadas a cabo con ayuda de un interferómetro (de Michelson) construido especialmente para ese fin y que se encontraba junto con una fuente puntual de luz sobre una plancheta masiva de piedra que flotaba en mercurio (fig. 1.4).

Si $\vec{v}$ es la velocidad de movimiento de la Tierra respecto del éter, entonces, al

girar la plancheta el interferómetro puede ser orientado de manera que los brazos ℓ_1 o ℓ_2 estén dirigidos en dirección de $\vec{v}$.

Un rayo de luz es emitido por la fuente F y con ayuda de una placa semitransparente P es dividido posteriormente en dos rayos, los cuales, luego de reflejarse en los espejos m_1 y m_2, de nuevo regresan a la placa P para refractarse en ella.

Los rayos refractados son hechos pasar luego por una lente convergente L, de manera que interaccionan entre sí (se superponen); en consecuencia, forman el cuadro de interferencia en la pantalla O del observador. Si el brazo ℓ_2 es orientado en dirección de $\vec{v}$, entonces de acuerdo con la concepción etérea, no es difícil calcular el tiempo de recorrido del rayo 2 para cubrir la distancia ℓ_2 en ambos sentidos:

$$t_2 = \frac{\ell_2}{c-v} + \frac{\ell_2}{c+v} = 2\frac{\ell_2}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \tag{1.10}$$

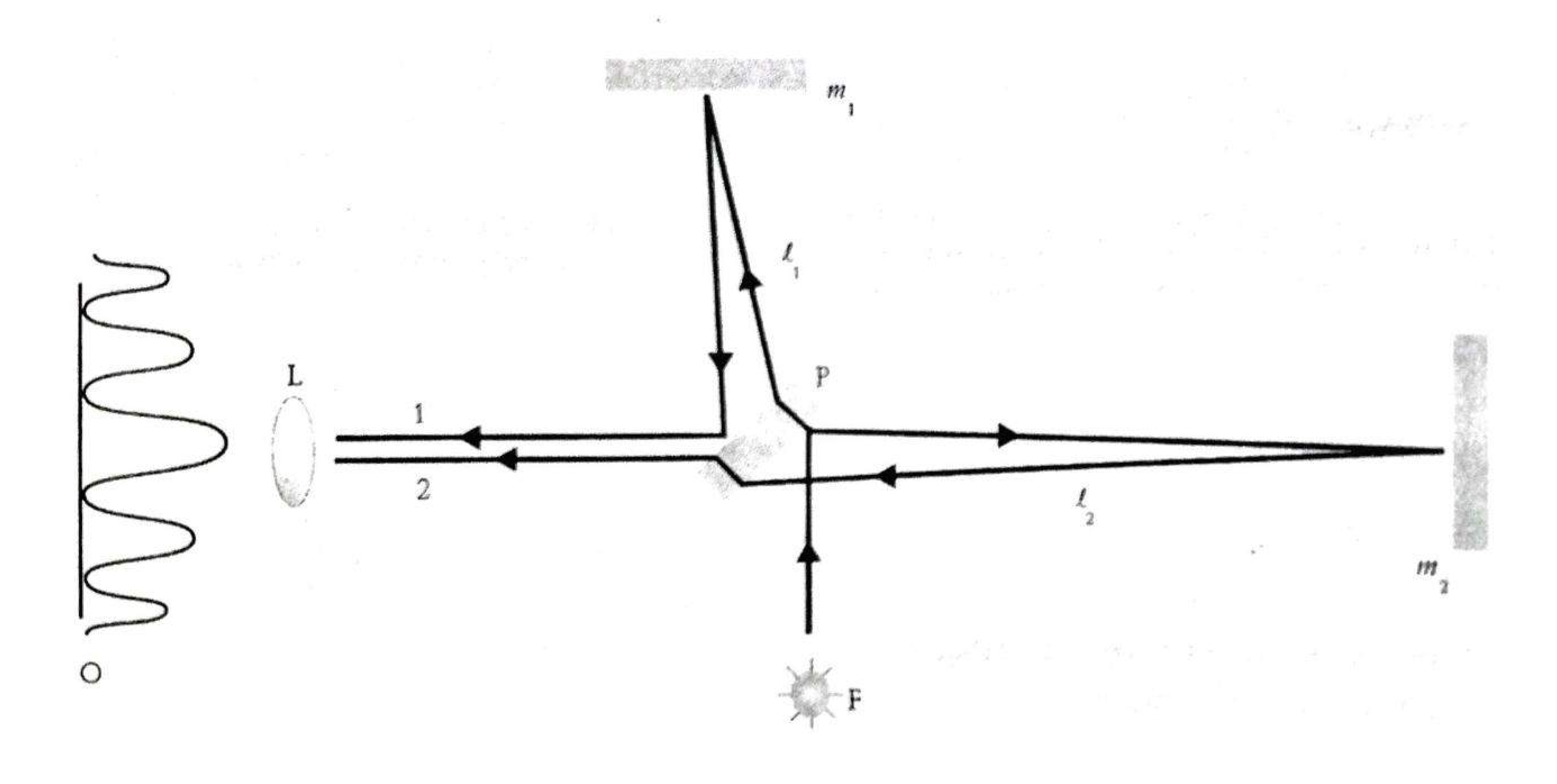


Figura 1.4. Experimento de Michelson-Morley. Un rayo parte de la fuente F y se divide en dos rayos en la placa P. Así, estos rayos secundarios al reflejarse en los espejos m_1, m_2 y ser pasados por una lente L, habrán recorrido distancias diferentes y generado un cuadro de interferencia en la pantalla O.

El tiempo t_1 de recorrido del rayo 1 para cubrir la distancia ℓ_1 en ambos sentidos puede encontrarse desde el triángulo Pm_1P' (fig. 1.5).

La longitud de la base de este triángulo es igual al recorrido de la placa P en el tiempo t_1; es decir, igual a vt_1, y por eso la longitud de un lado del triángulo será igual a:

$$L = \sqrt{\ell_1^2 + \frac{v^2 t_1^2}{4}} \tag{1.11}$$

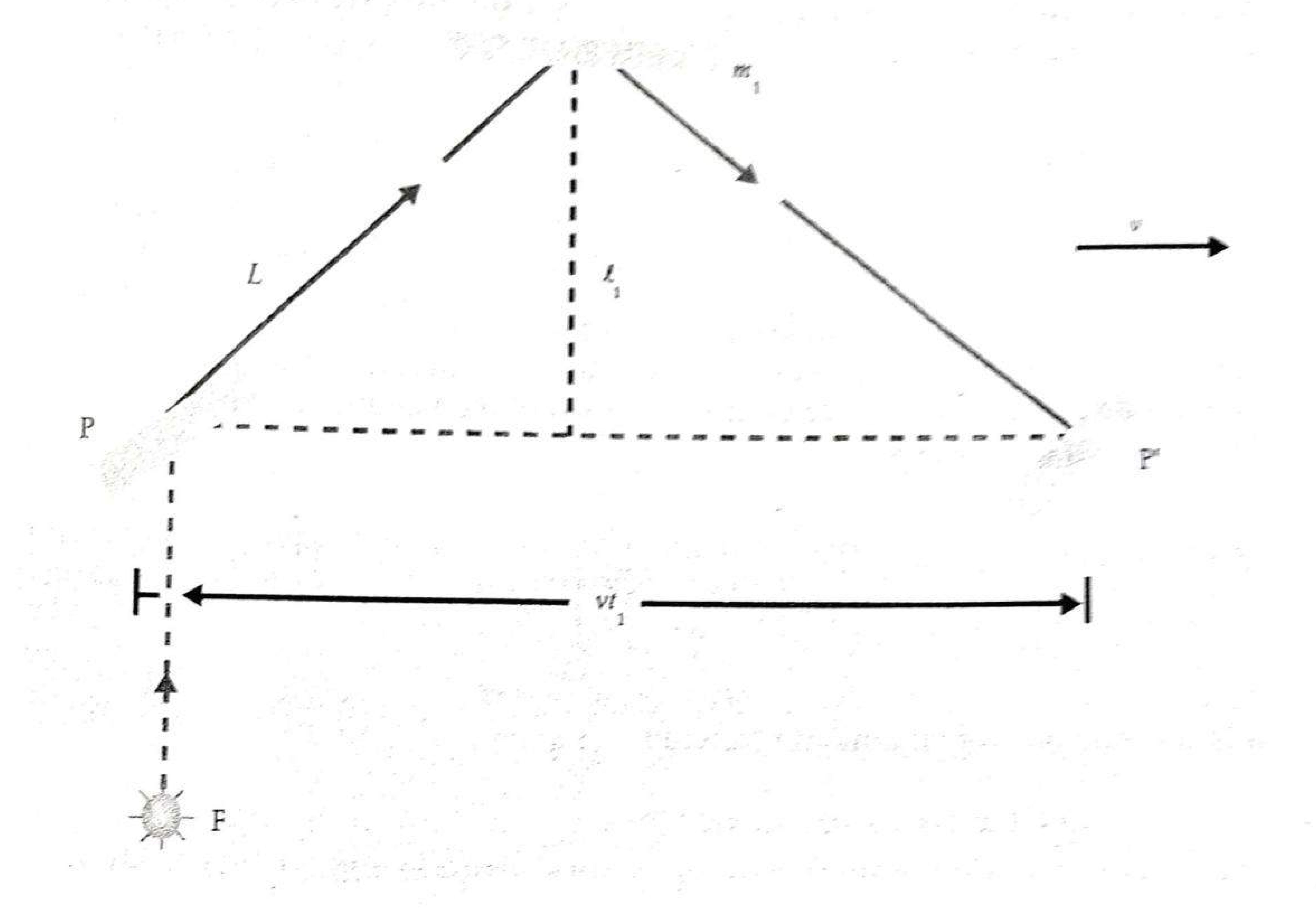


Figura 1.5. Experimento de Michelson-Morley. Análisis del recorrido (Pm_1P') del rayo 1, desde el hipotético éter en reposo, respecto del cual la Tierra tiene la velocidad indicada $\vec{v}$. Al ser la Tierra la referencia del observador, entonces el éter se mueve (*viento etéreo*) con la velocidad $-\vec{v}$ respecto de dicho cuerpo celeste.

Puesto que la luz recorre la trayectoria Pm_1P', cuya longitud es $2L$ en el tiempo t_1, entonces $2L = ct_1$ y, por tanto:

$$t_1 = \frac{2}{c}L = 2\frac{\ell_1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.12}$$

Así pues, la diferencia $t_1 - t_2$, la cual define la forma del cuadro de interferencia, está dada por la expresión siguiente:

$$t_1 - t_2 \equiv \Theta = \frac{2}{c}\left(\frac{\ell_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\ell_2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{1.13}$$

Ahora bien, si en dirección de $\vec{v}$ se orienta el brazo ℓ_1, los rayos 1 y 2 cambian de lugar y se obtiene la siguiente diferencia:

$$t_1' - t_2' \equiv \Theta' = \frac{2}{c}\left(\frac{\ell_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\ell_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{1.14}$$

en consecuencia, la posición del cuadro de interferencia cambia.

Si la longitud de onda de la luz utilizada es λ, el corrimiento (o desplazamiento relativo) de los polos de interferencia [6] se define por el cambio de la diferencia de recorrido de los rayos (en unidades λ).

$$\delta = \frac{c}{\lambda}(\Theta' - \Theta) = \frac{2}{\lambda}(\ell_1 + \ell_2)\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{1.15}$$

Si se utiliza la fórmula para el binomio de Newton

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx, \quad x << 1$$

y además se supone que la velocidad $\vec{v}$ es del orden de la velocidad del movimiento de la Tierra alrededor del Sol (movimiento de traslación), es decir, $\frac{v}{c} \approx 10^{-4}$, se obtiene para δ la siguiente expresión:

$$\delta \approx \frac{\ell_1 + \ell_2}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

En el primer experimento de Michelson, la suma de las longitudes de los brazos del interferómetro era igual a 25 m y en los posteriores aun mayor. Por eso, para $\lambda = 10^{-6}$ m se tiene que

$$\delta > \frac{1}{4}$$

Tal corrimiento de los polos de interferencia puede ser registrado visualmente con toda certeza; sin embargo, dicho corrimiento no se observó durante este experimento ni en ninguno posterior.

Así pues, en todos los experimentos para descubrir el *viento etéreo* no se logró dar una respuesta afirmativa sobre la existencia del mismo. Ello sirvió de base para dudar de la validez de la concepción *etérea*.

1.4. HIPÓTESIS DE FITZGERALD Y DE LORENTZ

En 1891, con objeto de explicar (o mejor dicho, de justificar) el resultado negativo del experimento de Michelson, el físico irlandés G. F. Fitzgerald propuso una hipótesis. Según ésta, todos los cuerpos que se mueven respecto del éter con cierta velocidad $\vec{v}$, experimentan una reducción de sus dimensiones longitudinales en dirección de su movimiento de acuerdo con la fórmula

$$\ell = \frac{\ell_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1.16)$$

donde ℓ_0 es la medida longitudinal del cuerpo inmóvil respecto del éter. La sustitución de (1.16) en (1.13) y (1.14) conlleva a que:

$$\Theta = \frac{2(\ell_1 - \ell_2)}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Theta' \qquad (1.17)$$

de donde se obtiene que el corrimiento respectivo es nulo ($\delta = 0$) en correspondencia con el experimento.

Sin embargo, esta hipótesis es artificial en el sentido de que las demostraciones mostradas por Fitzgerald estaban basadas en algunas suposiciones sobre el carácter de las fuerzas de interacción de los átomos en la sustancia. Fitzgerald intentó justificar con esta hipótesis la afirmación de que el experimento de Michelson-Morley no pudo dar respuesta a la pregunta de si existe o no el éter.

De esta manera, queda aún abierta la posibilidad de descubrir el *viento etéreo* en algún otro experimento.

Así, por ejemplo, la velocidad $\vec{v}$ en (1.15) o en (1.17) puede ser representada en la forma

$$\vec{v} = \vec{v}_s + \vec{v}_t,$$

donde $\vec{v}_s$ es la velocidad del Sol respecto del éter, y $\vec{v}_t$ es la velocidad de la Tierra respecto del Sol. Puesto que en el transcurso del año $\vec{v}_t$ cambia de forma sensible, entonces cuando $\ell_1 \neq \ell_2$ (véase 1.17) el cuadro de interferencia cambia también; no obstante, un experimento prolongado realizado en 1932 por el físico estadounidense R. G. Kennedy, reportó igualmente un resultado negativo.

Lorentz consideraba el resultado negativo del experimento de Michelson un argumento convincente a favor de la revisión de la concepción del éter, la cual él mismo defendía antes de conocerse los resultados del experimento anterior.

No satisfecho con la hipótesis formal de Fitzgerald, Lorentz comenzó a buscar una generalización tal de las transformadas de Galileo (1.2), que garantizara la imposibilidad de descubrir el viento etéreo en cualquier experimento óptico o electrónico. En 1904 Lorentz [7] encontró dichas transformaciones, que primero representó de la manera siguiente:

$$x' = \gamma x_0; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t}{\gamma} - \frac{\gamma v x_0}{c^2} \tag{1.18}$$

donde $x_0 = x - vt$ es la coordenada espacial transformada de la manera galileana, y $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ es el factor de reducción de Fitzgerald, el cual refleja la reducción longitudinal de los cuerpos según la hipótesis de Fitzgerald. Pero lo más valioso en la propuesta de Lorentz fue la introducción de un nuevo tiempo t', el cual no coincide con el antiguo tiempo t, contrariamente a la concepción del tiempo absoluto.

Lorentz denominó la combinación $t - \frac{vx}{c^2}$ *tiempo del lugar* o *tiempo local.*

Luego de sustituir la variable x_0 en (1.18) se encuentra que:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$y' = y \tag{1.19}$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Cabe señalar que semejante sistema de transformadas era ya conocido por otros científicos [2].

En 1904, estas transformadas fueron utilizadas por A. Poincaré y a propuesta suya fueron denominadas **transformadas de Lorentz**.

Sin embargo, Lorentz consideró las nuevas coordenadas x', y', z' y t' como variables formalmente introducidas, cuya utilización es cómoda, pues permiten conservar invariante la forma de las ecuaciones de la electrodinámica.

Lorentz demostró la invarianza de las ecuaciones homogéneas (libres) de Maxwell respecto de las transformadas (1.19). La generalización de esta propiedad en las ecuaciones de Maxwell fue dada con fuentes por Poincaré.

Lorentz consideraba verdaderas sólo las coordenadas x, y, z y el tiempo t. Así pues, él mismo no pudo negar por completo la concepción del éter y reconocer que el principio de la relatividad es justo también en la electrodinámica, a condición de sustituir las transformadas de Galileo por las nuevas coordenadas primadas x', y', z' y t' ¡precisamente! Hoy se considera que la falta de visión de Lorentz respecto de la afirmación anterior, demuestra que a pesar de negar él mismo la concepción del éter, en sus trabajos reflejó justamente la posición etérea. También demuestra que eliminar totalmente las raíces echadas en nuestra mente por una hipótesis que se consideró válida durante siglos, es bastante difícil de hacer sin caer en posibles desviaciones, como le sucedió a Lorentz. Definitivamente, Lorentz estuvo a sólo un paso de extender el principio de la relatividad a todos los fenómenos físicos y

descubrir así la esencia de la teoría relativista consistente en la afirmación de que *la simultaneidad de eventos espacialmente separados es relativa.*

1.5. POSTULADOS DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

Los resultados negativos del experimento de Michelson y una serie de experimentos electrodinámicos colocaron en duda la existencia del éter y dieron base para propagar el principio de la relatividad en los fenómenos electrodinámicos.

La necesidad de regresar al principio de la relatividad fue profundamente reconocido por Einstein, quien propuso partir no de la concepción del éter, sino de la afirmación de que los fenómenos electromagnéticos son descritos por las mismas ecuaciones de Maxwell-Lorentz en todos los SIR.

Sin embargo, las ecuaciones de la electrodinámica son no covariantes respecto de las transformadas de Galileo; en este sentido, Einstein planteó el problema de buscar un nuevo sistema de transformadas que correspondieran a nuevas concepciones sobre el espacio-tiempo, y respecto del cual dichas ecuaciones fuesen covariantes.

Para deducir las transformadas deseadas, **Einstein** partió de algunas propiedades generales del espacio y del tiempo y de **dos postulados** fundamentales contenidos en las siguientes afirmaciones:

1. *En cualesquiera sistemas inerciales de referencia todos los fenómenos físicos suceden de igual manera; es decir, de acuerdo con las mismas leyes: postulado o principio de la relatividad.*
2. *La velocidad de la luz no depende del estado de movimiento de la fuente y es igual para todos los sistemas inerciales de referencia: postulado de constancia de la velocidad de la luz en el vacío.*

Como se observa, el primer postulado es la propagación del principio relativista de Galileo en todos los fenómenos físicos y no sólo en los electrodinámicos. Además, el segundo postulado está contenido en el primero, ya que el proceso de propagación de la luz debe suceder de igual manera en todos los SIR; no obstante, el segundo postulado es de capital importancia, pues niega de forma concisa la concepción etérea en óptica y electrodinámica, dejando al descubierto el papel fundamental de la constante electrodinámica (velocidad de la luz en el vacío) en la teoría general del espacio y del tiempo.

De acuerdo con la concepción del éter electromagnético, los postulados de Einstein parecen contradictorios.

Para cerciorarse de ello, basta imaginar el siguiente experimento. Sea que una fuente puntual de luz que se encuentra en el origen de coordenadas de S, emite una señal en el momento de tiempo $t = 0$, de manera que en ese preciso instante coinciden los orígenes de dicho sistema y el de otro S', desde los cuales será analizada la propagación de la luz. Igualmente será considerado que las direcciones de los correspondientes ejes de coordenadas coinciden en ambos sistemas.

El frente de la onda luminosa en S, en el momento de tiempo $t = T$, tendrá la forma de una esfera R de radio cT con centro en el origen del SIR S. Sin embargo, en S' el frente de la misma onda luminosa debe estar representada de acuerdo

con los postulados einstenianos por la esfera R' del mismo radio pero con centro en el origen del SIR S' (fig. 1.2).

De esta manera, los frentes de una misma onda luminosa en diferentes SIR, no coinciden.

A simple vista, parece que para resolver esta *evidente* contradicción es necesario negar el principio de constancia de la velocidad de la luz; es decir, considerar que la velocidad de ésta depende del estado de movimiento de la fuente o también, negar ambos postulados y aceptar la concepción etérea.

Empero, un análisis más cuidadoso de la paradoja muestra que la causa de su surgimiento radica en la utilización espontánea de la concepción del tiempo absoluto, la cual está muy arraigada en la mente y que calladamente es aceptada al colocarse $t = t'$, e identificar el principio relativista (y la condición de covarianza) con las transformadas de Galileo (1.2).

En realidad, si se renuncia a la condición $t = t'$ y en su lugar se considera que $t' = f(t, x)$ como lo propuso por ejemplo Lorentz, entonces queda claro que las esferas R y R' no deben coincidir, ya que cada una de ellas es un lugar geométrico de eventos simultáneos en su sistema particular de referencia. Los eventos consisten aquí en el arribo de la onda luminosa a todos los puntos distribuidos en la superficie de una esfera de radio ct en el momento t. De esta manera, en S' la esfera R' es también un frente de onda luminosa cuyos puntos deben ser tomados en su propio momento de tiempo t'.

Así, la aparente contradicción de los postulados einstenianos queda eliminada con la condición de renunciar a la concepción del tiempo absoluto y considerar la simultaneidad de eventos espacialmente separados, relativa; esto es, hay que relacionar las coordenadas espaciales y temporal de los diferentes SIR no con las transformadas de Galileo, sino con otras transformadas que satisfagan los postulados de Einstein. Como quedará claro, esas transformadas son las de Lorentz.

1.6. INVARIANZA Y COVARIANZA

La descripción de las coordenadas espacio-temporales de un sistema de referencia con ayuda de las coordenadas espacio-temporales de otro sistema de referencia, se realiza mediante fórmulas de transformación. Durante esto, diferentes magnitudes físicas en general cambian su valor numérico y las ecuaciones que describen tales o cuales procesos físicos pueden también cambiar su forma. Pero esto no siempre es así.

Si durante la descripción referida el valor numérico de cierta cantidad queda invariable, entonces se dice que ésta es **invariante** respecto de la transformación utilizada.

Ahora bien, si durante la descripción mencionada la forma de cierta ecuación no cambia, es decir, si esta ecuación con las variables del nuevo sistema de referencia posee la misma forma que con las variables del sistema anterior, entonces se dice que dicha ecuación en cuestión es **covariante** respecto de las transformadas utilizadas.

A veces, puede tener lugar no sólo que la ecuación no cambie de forma sino que también el valor numérico (coeficientes) de los miembros de la ecuación no cambien, entonces se dice que la ecuación estudiada es invariante respecto de las transformadas utilizadas.

1.7. PROPIEDADES GENERALES DEL ESPACIO-TIEMPO

1.7.1. Definición de simultaneidad

Para la obtención de las transformadas de Lorentz será necesario considerar algunos conceptos y propiedades del espacio y del tiempo.

En algunas ocasiones, los conceptos de masa y materia son utilizados indiscriminadamente, de manera que parecieran ser la misma cosa. Sin embargo, la confusión de estos términos podrá acarrear en algunos casos serias dificultades, por lo que es necesario aclararlo cuanto antes para su correcto uso en este curso.

Las ciencias en general parten para sus estudios de datos empíricos, afirmaciones y conceptos, cuya veracidad no se pone en duda. El conjunto de estas premisas forma los así llamados axiomas de tal o cual ciencia. La filosofía, y aquí se hace referencia a la filosofía materialista, no puede ser la excepción, sólo que en este caso los axiomas (o al menos sus análogos) pasan a denominarse *categorías filosóficas*. Para un estudio más detallado al respecto se recomienda la lectura [2].

Materia es una categoría filosófica con que se denota la realidad objetiva, la cual es reconocida por el hombre a través de sus sentidos y que es reflejada por sus sensaciones y que además existe independientemente de ellas.

En esta definición se establece pues, que la realidad objetiva, es decir, la materia, existe, independientemente de si el hombre la percibe o no.

Se dice que el espacio y el tiempo son formas universales de existencia de la materia: la materia no existe fuera del espacio y del tiempo, así como el espacio y el tiempo son inconcebibles sin la materia. Por esta razón, al describir las propiedades del espacio y del tiempo, es necesario tener en cuenta que ellas son el reflejo de propiedades más generales de la materia y de las leyes que rigen su movimiento.

Considerando las leyes de la mecánica y la electrodinámica, de cuya veracidad no se duda, pueden destacarse las siguientes **propiedades más generales del espacio: tridimensionalidad, isotropía y homogeneidad**. La propiedad más importante del tiempo es su homogeneidad, que implica la libertad de elegir el origen de referencia o de conteo del tiempo, cuando sea más conveniente. Ahora bien, si se toma en cuenta que el movimiento[3] es un atributo inherente de la materia, entonces quedará claro que otra propiedad importante del tiempo es su anisotropía, la cual se refleja en que posee una sola dirección y un solo sentido: del pasado al futuro.

Para aclarar la esencia de estas propiedades, debe señalarse que el espacio puede ser representado con ayuda de una red de coordenadas que sirva para establecer todas las posiciones posibles que pueden ocupar los objetos. La red de coordenadas puede ser fijada a algún cuerpo material al que se hará mención como **cuerpo de referencia.** Si este cuerpo es absolutamente rígido, entonces sus puntos pueden considerarse imágenes de los puntos de la red de coordenadas. Para que esto último tenga lugar es suficiente considerar sólo tres números-coordenadas, cartesianas en el caso más simple, lo cual es reflejo de la tridimensionalidad del espacio.

La igualdad de las tres coordenadas cartesianas refleja la isotropía del espacio, es decir, no hay direcciones privilegiadas en éste, mientras que la posibilidad de elegir arbitrariamente el origen de coordenadas representa su homogeneidad.

[3] Se tienen en cuenta cambios de forma, cualitativos, cuantitativos, giros y desplazamientos.

Como se mencionó, el movimiento es una propiedad intrínseca de la materia, es decir, ésta se encuentra en continuo movimiento, de tal manera que se verifican tanto las leyes de la termodinámica como de la teoría de la relatividad. La evolución en la materia está dada precisamente gracias a su movimiento, lo cual a su vez, indica sobre las múltiples formas en que la misma pueda existir y, sobre todo, de ser captada por los órganos sensoriales del hombre y por sus correspondientes extensiones (dispositivos). Así pues, como reflejo de ese movimiento característico de la materia se encuentran los diferentes procesos que se verifican en ella. Ahora bien, en el proceso de conocimiento de nuestro entorno, se observa que no todos los procesos poseen la misma duración, algunos "duran" más que otros y a la inversa; por esta razón, es necesario introducir un concepto que permita cuantificar en general dicha duración. Ese concepto pudo ser llamado de muchas maneras, de hecho lo es en los diferentes idiomas y dialectos que existen en el planeta, sin embargo, su significado es el mismo y es el concepto **tiempo**. Como éste debe servir para cuantificar la duración de los procesos en la naturaleza, se hace necesario asignarle una escala de valores mediante la elección de la correspondiente *unidad de tiempo* (véase por ejemplo en [8]).

Así entonces, la materia está en constante cambio y los diferentes procesos en ella surgen para luego finalizar y dar lugar a otros, distintos en cuanto a forma y cualidades. Por esta razón, el tiempo no puede ser que tenga más de una dirección y más de un solo sentido: del pasado al futuro.

Como representación abstracta del tiempo puede servir la sucesión ordenada del pasado al futuro de los momentos de tiempo que pueden ser registrados por ciertos dispositivos denominados relojes (estándares). En cada posición en el espacio, puede ser colocado un reloj correspondientemente, de tal manera que éste registre el paso del tiempo en la misma. Para esto, todos los relojes son considerados idénticos; es decir, el ritmo de su marcha al ser éstos trasladados a una misma posición, debe ser el mismo.

La red de coordenadas que ha sido fijada al cuerpo de referencia y las sucesiones ordenadas de los momentos de tiempo registradas por relojes estándares colocados en cada posición del espacio, forman en conjunto lo que se denomina un **sistema de referencia**.

Es necesario saber distinguir un sistema de referencia de un sistema de coordenadas. Este último incluye sólo la red de coordenadas y la forma de registro del tiempo. El cuerpo de referencia es característica sólo del sistema de referencia.

Entre todos los sistemas de referencia se destacan, por su sencillez, los **sistemas inerciales de referencia** los cuales se mueven según la ley de inercia; es decir, los cuerpos de referencia adjuntos a estos sistemas no experimentan fuerzas externas algunas o la suma total de las mismas es igual a cero. Por esta razón, dichos sistemas o bien están en reposo o bien se mueven uniforme y rectilíneamente respecto de un observador. Tales cuerpos de referencia pueden ser obtenidos en la naturaleza sólo aproximadamente.

Una vez analizado lo que es un sistema inercial de referencia, se pasará a definir la simultaneidad de eventos.

El concepto de simultaneidad es relativo, por lo que deberá darse su definición de acuerdo con los postulados einstenianos. Además, serán analizados eventos espacialmente separados, ya que si éstos suceden en la misma posición, la simultaneidad no se distingue de la galileana.

Con tal fin será utilizado un proceso físico palpable: la propagación de la luz en el vacío, cuya velocidad según el postulado de Einstein es constante y se le denota mediante la letra **c**.

Sea que en dos puntos diferentes M_1 y M_2 son colocados dos relojes R_1 y R_2 correspondientemente y se les quiere **sincronizar**. Esto es, sus lecturas (que no son lo mismo que sus marchas) deberán guardar cierta relación matemática cuando los relojes se encuentren en distintas posiciones, y serán iguales cuando ambos relojes coincidan en la misma posición. Para ello, una señal luminosa es enviada desde el punto M_1 al punto M_2 en el momento de tiempo t_1 según el reloj R_1. Se supone que la misma señal llega al punto M_2 en el momento t_2 según el reloj R_2 e instantáneamente se refleja y regresa hasta llegar al punto de partida M_1 en el momento t_1' según el reloj R_1 (fig. 1.6).

Está claro que los tiempos utilizados por la luz en hacer el recorrido de ida y vuelta deben ser iguales como consecuencia de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío. Por eso, es necesario considerar que

$$t_2 - t_1 = t_1' - t_2, \quad \text{o} \quad t_2 = \frac{(t_1 + t_1')}{2} \qquad (1.20)$$

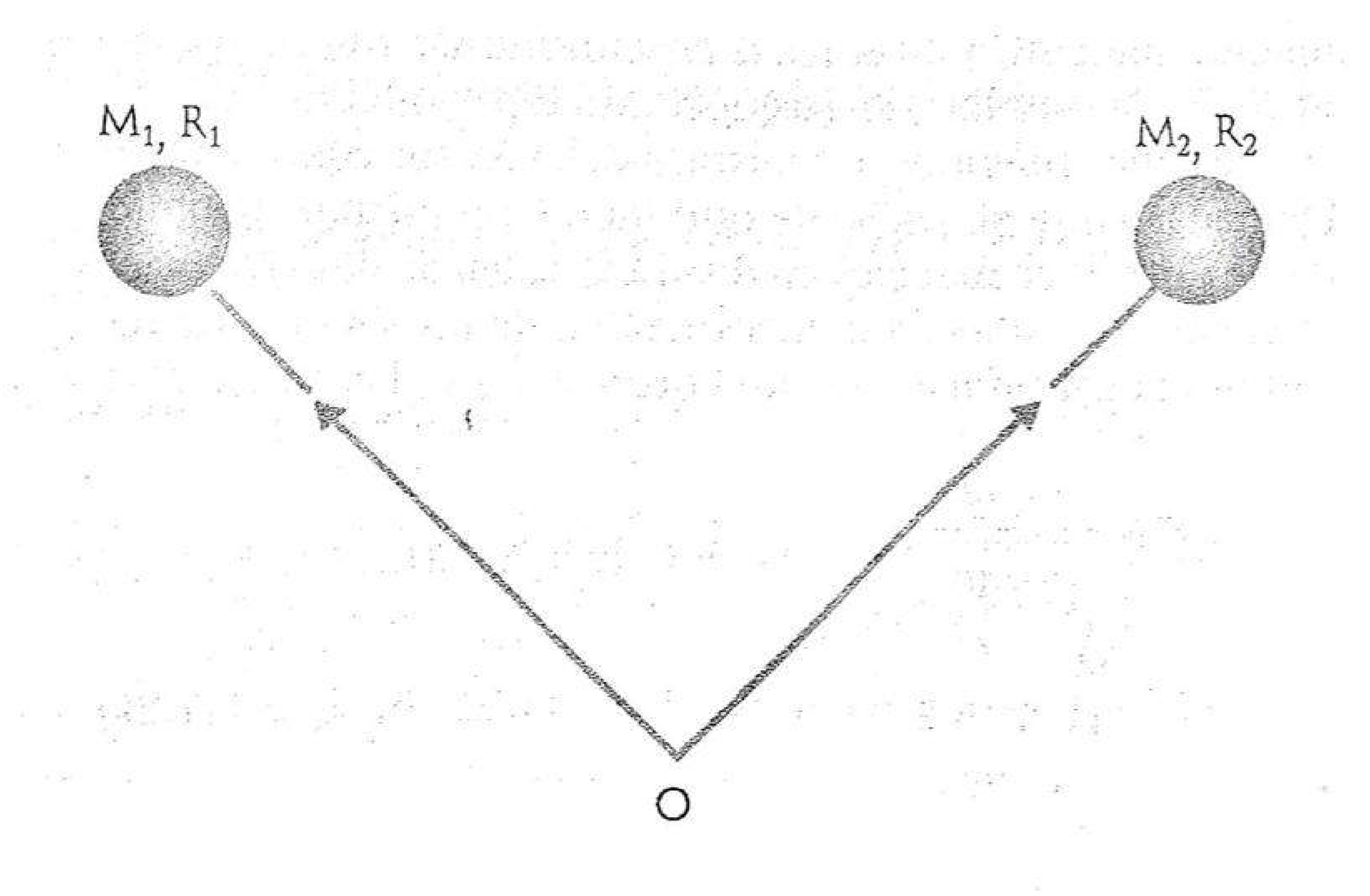


Figura 1.6. Sincronización de dos relojes R_1 y R_2 que se encuentran en las posiciones M_1 y M_2, respectivamente.

En otras palabras, el reloj R_2 debe ser establecido de manera que en el momento de arribo de la señal luminosa al punto M_2 su lectura sea t_2 en correspondencia con (1.20).

Semejante sincronización luminosa de relojes fue adoptada por Einstein como base para la determinación de la simultaneidad de eventos espacialmente separados (véase fig. 1.6)

Indudablemente que existen otros métodos para sincronizar relojes; sin embargo, no serán analizados aquí.

1.8. TRANSFORMADAS DE LORENTZ

Para obtener estas transformadas cuyo significado ya fue comentado en la sección 1.5. "Postulados de la teoría de la relatividad", es necesario asumir las siguientes suposiciones:

1. *La homogeneidad del espacio y del tiempo; es decir, la forma de las transformadas no debe depender de la elección del origen de las coordenadas espaciales y temporales.*
2. *La isotropía del espacio; esto es, la igualdad de todas las direcciones espaciales.*
3. *El principio de la relatividad, el cual significa la igualdad de todos los sistemas inerciales de referencia en cuanto a que las leyes físicas que tienen lugar en los mismos, suceden de igual manera.*
4. *La constancia de la velocidad de la luz en el vacío: dicha velocidad es la misma para todos los SIR y no depende del estado de movimiento de la fuente.*

Sean dos SIR S y S' a los cuales serán fijados sistemas cartesianos de coordenadas. S será llamado condicionalmente inmóvil, y S' *sistema en movimiento respecto de* S, de manera que su velocidad es $\vec{v}$. Al estudiar las descripciones espacio-temporales de algún proceso material en los sistemas referidos, las mismas deberán ser equivalentes, es decir, deberán estar relacionadas entre sí. Dicho de otro modo, un mismo continuo espacio-tiempo se representa de diferentes maneras en distintos sistemas de referencia.

Por lo anterior, deben existir fórmulas de transformación de un sistema de referencia a otro. Éstas se denominan **transformadas de Lorentz**, y son las siguientes:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y, \quad z' = z \qquad (1.21)$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Las **transformadas inversas** se obtienen con el cambio $v \to -v$ y además, cambiando las coordenadas primadas por las no primadas y a la inversa:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y', \quad z = z' \qquad (1.22)$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para ver detalladamente la obtención de las transformadas de Lorentz, se recomienda al lector revisar el apéndice A. "Deducción de las transformadas de Lorentz-Einstein."

De esta manera, se ha mostrado el sistema de transformadas para las coordenadas espaciales y temporal, que permiten describir un sistema desde SIR diferentes del propio. En la transformadas están contenidas las nuevas concepciones sobre el espacio y el tiempo, emanadas desde el principio de la relatividad extendido a todos los fenómenos físicos, incluyendo los electrodinámicos.

1.9. CONSECUENCIAS GENERALES DE LAS TRANSFORMADAS DE LORENTZ

Caso límite de movimientos lentos ($v << c$). En la mecánica clásica existe una relación con movimientos cuyas velocidades son mucho más pequeñas que la velocidad de la luz en el vacío; por eso, el principio relativista basado en las transformadas de Galileo se confirma plenamente. Luego entonces, las transformadas galileanas deberán obtenerse desde las transformadas de Lorentz para el caso de movimientos lentos.

Si se toma el límite cuando $\frac{v}{c} \to 0$, o lo que es lo mismo, cuando $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\to 1$, entonces las transformadas (1.21) adquieren la forma siguiente:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t - \frac{vx}{c^2} \tag{1.23}$$

Como se observa, (1.23) difiere de las transformadas de Galileo, pues en lugar del tiempo absoluto $t' = t$ se obtuvo el tiempo *local* de Lorentz $t' = t^{\text{local}} - \frac{vx}{c^2}$.

Sin embargo, para los problemas físicos reales las coordenadas espaciales pueden considerarse acotadas. De esta manera, excluyendo los puntos alejados infinitamente, es decir, colocando que $vx << c^2t$ se confirma que las transformadas de Lorentz (1.21) en verdad se reducen a las transformadas de Galileo.

Es así como la nueva teoría del espacio-tiempo basada en las transformadas de Lorentz, satisface el principio de correspondencia, ya que en el límite de movimientos lentos se reducen a la teoría clásica de Newton-Galileo.

Satisfacer el principio de correspondencia es una condición necesaria que se plantea a cualquier teoría nueva, ya que la teoría clásica, probada infinidad de veces, deberá contenerse en la nueva como un caso límite.

Las transformadas de Lorentz pierden el sentido físico cuando $v > c$. En este caso, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ se convierte en una cantidad imaginaria y junto con ella se hacen imaginarias las nuevas coordenadas x' y t'. Ahora bien, los resultados de cualesquiera mediciones en el espacio y en el tiempo se expresan mediante canti-

dades reales. Por eso es que poseen sentido físico sólo las coordenadas espaciales y temporal que son reales.

Por consiguiente, los sistemas de referencia que se mueven con velocidades que superan la velocidad de la luz en el vacío, no poseen sentido físico y deberán ser excluidas del análisis. Al mismo tiempo, las transformadas que relacionan a tales sistemas y que se analizan formalmente desde el punto de vista matemático, pueden resultar útiles –desde luego– para la solución de algunos problemas.

La relatividad de la simultaneidad. Al analizar la propagación de una onda luminosa en dos SIR diferentes S y S' (véase la sección 1.5. "Postulados de la teoría de la relatividad") se llegó a la conclusión de que los postulados einstenianos no se contradicen si es aceptada la suposición de la relatividad de la simultaneidad de eventos espacialmente separados.

A continuación, se confirmará lo mismo con ayuda de las transformadas de Lorentz. Para simplificar las expresiones no serán consideradas las coordenadas y y z, las cuales, como se sabe, no experimentan cambio alguno.

Sea que en el sistema inmóvil de referencia S son observados dos eventos diferentes (t_1, x_1) y (t_2, x_2). Analícese la observación de los mismos desde el sistema S' el cual se mueve con velocidad $\vec{v}$ respecto de S.

Desde las transformadas de Lorentz, se tendrá que:

$$x_2' - x_1' = \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] \tag{1.24}$$

$$t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right] \tag{1.25}$$

Supóngase que en S los eventos son simultáneos; es decir,

$$t_2 = t_1 \tag{1.26}$$

Entonces en S', de acuerdo con (1.26), serán justas las relaciones

$$t_2' - t_1' = -(x_2 - x_1)\frac{v\gamma}{c^2}; \quad x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) \tag{1.27}$$

de donde

$$t_2' - t_1' = -(x_2' - x_1')\frac{v}{c^2} \neq 0 \tag{1.28}$$

De esta manera, los eventos que son simultáneos en S dejan de serlo en S'; es decir, **la simultaneidad de eventos espacialmente separados es relativa.**

El intervalo de tiempo $t_2' - t_1'$ puede ser llamado *tiempo de desincronización*, ya que los eventos sincronizados en un sistema de referencia se desincronizan en otro. Este tiempo es, por tanto, una expresión cuantitativa de la relatividad de la simultaneidad.

Esta circunstancia es lo esencialmente nuevo que aportan las transformadas de Lorentz en la concepción del espacio y el tiempo del hombre.

En la mecánica clásica, el tiempo era considerado absoluto y se reconocía únicamente la relatividad espacial; es decir, la relatividad de eventos que suceden en un mismo lugar.

De esta manera, si en S los eventos (t_1, x_1) y (t_2, x_2) suceden en un mismo punto $(x_1 = x_2)$ y en diferentes momentos de tiempo $(t_1 \neq t_2)$, entonces en el sistema S', de acuerdo con las transformadas de Galileo, dichos eventos estarán divididos por un segmento

$$x'_2 - x'_1 = v(t_1 - t_2) \neq 0$$

En lo referente a la simultaneidad de eventos, era considerada absoluta:

$$t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1$$

Enseguida se analizará un modelo concreto en el que se manifieste la relatividad de la simultaneidad.

Sea que en el sistema S' se encienden simultáneamente dos lámparas colocadas a lo largo del eje x'. Entonces, en el sistema S las señales no serán simultáneas y las lámparas se encenderán una tras otra y el frente luminoso de acuerdo con (1.26) se desplaza con velocidad

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{c^2}{v} \tag{1.29}$$

Esta velocidad está relacionada con la velocidad relativa v de los sistemas S y S' mediante la expresión $uv = c^2$ utilizada en su tiempo por Louis de Broglie para describir las **ondas de la materia**.

De Broglie supuso que con cualquier partícula inmóvil de masa m_0, está relacionado cierto proceso periódico de frecuencia $\omega_0 = m_0c^2/\hbar$, donde $\hbar = h/2\pi$ es la constante reducida de Planck y h es la conocida constante de Planck; dicho de otra manera, postuló la existencia del campo ondulatorio

$$\psi(t, x) = \psi_0 e^{-i\omega_0 t},$$

el cual varía según la ley armónica al mismo tiempo en todos los puntos del espacio.

Si la partícula se mueve con velocidad v, entonces, considerando el campo escalar ψ, en el sistema S' relacionado con la partícula, el campo brogliano posee la forma:

$$\psi'(t', x') = \psi_0 e^{-i\omega_0 t'}$$

mientras que en el sistema S, de acuerdo con las transformadas de Lorentz, es de la forma

$$\psi(t, x) = \psi'(t', x') = \psi_0 e^{-i\omega_0\left(t - \frac{x}{u}\right)}$$

donde $u = \dfrac{c^2}{v}$, $\omega = \omega_0\gamma$, $\gamma = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

De esta manera, con cada partícula que se mueve con velocidad v, está relacionado un campo brogliano en forma de onda plana, la cual se desplaza en el espacio con velocidad de fase u definida por la expresión (1.29).

Acotamiento de la velocidad de propagación de las señales. Las expresiones (1.24) y (1.25) permiten, asimismo, llegar a la conclusión de que la velocidad de cualquier señal, es decir, de una perturbación que transporta información, no puede superar la velocidad de la luz en el vacío c.

Para mostrar esto, sea que la señal enviada desde el punto x_1 en el momento de tiempo t_1, es recibida en el punto x_2 en el momento de tiempo t_2 (fig. 1.7).



Figura 1.7. Propagación de una señal.

Es obvio que el momento de emisión de la señal precede al momento de su recepción: $t_1 < t_2$ y la velocidad de propagación de la señal es igual a

$$v_s = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{1.30}$$

Mientras tanto, en el sistema de referencia S' [véanse (1.25) y (1.30)] se tiene que

$$t_2' - t_1' = (t_2 - t_1)\gamma\left(1 - \frac{vv_s}{c^2}\right) \tag{1.31}$$

Puesto que para todos los sistemas de referencia reales, $v < c$, entonces debido a que $v_s < c$, siempre se cumple que $vv_s < c^2$, y por eso desde (1.31) se tendrá que $t_1' < t_2'$; es decir, la sucesión de los momentos de emisión de la señal y de su recepción se conserva invariable en todos los SIR reales.

Sin embargo, si $v_s > c$, entonces será posible encontrar sistemas de referencia en los cuales se satisfaga la condición

$$\frac{c}{v_s} < \frac{v}{c} < 1,$$

de tal manera que $vv_s > c^2$, por eso $t_2' < t_1'$. Pero todo cambio en la sucesión de los momentos de emisión de la señal y de su absorción, que dependa de la elección del sistema de referencia (siempre arbitraria), es incompatible con el principio de la causalidad, al menos en la forma en que el mismo se cumple para todos los procesos mi-

croscópicos. De acuerdo con este principio, cualquier información primero es enviada (causa) y posteriormente recibida (efecto). Invertir dicha sucesión es imposible. Y así, al aceptar el principio de la causalidad es necesario reconocer que la velocidad de trasmisión de la información no puede superar la velocidad de la luz en el vacío c.

Sin embargo, extender esta conclusión a todos los procesos físicos sin excepción, no procede, ya que no todos ellos pueden convertirse en señal; es decir, ser utilizados para la trasmisión de información. Como ejemplo de tales procesos están las ya mencionadas ondas broglianas, que se propagan con una velocidad de fase que supera la velocidad de la luz. Esto va unido al hecho de que una onda monocromática infinita no puede portar información alguna de acuerdo con las concepciones actuales, y por eso no puede ser señal. Se puede trasmitir información sólo con ayuda de un grupo de ondas cuyo centro se propaga con cierta velocidad denominada *velocidad de grupo*.

En particular, puede mostrarse que para las ondas broglianas, la velocidad de grupo coincide con la velocidad v de la partícula asociada a esta onda y relacionada con la velocidad de fase u por la expresión (1.29). Durante esto, $u > c$, ya que $v < c$, pues se supone que siempre se puede relacionar un sistema de referencia con la partícula.

Es admisible la existencia de partículas reales, las cuales se mueven con una velocidad mayor que la velocidad de la luz en el vacío, si se renuncia a la comúnmente sobreentendida independencia de los procesos de emisión y absorción (o de causa y efecto). Para partículas comunes sublumínicas ($u < c$), el proceso de emisión en todos los sistemas posibles de referencia precede al proceso de absorción. Para partículas ultralumínicas ($u > c$) la sucesión de los procesos de emisión y absorción depende de la elección del sistema de referencia (véase 1.31) es decir, es arbitraria.

Por tanto, si se supone que la partícula ultralumínica emitida en el punto x_1 por el emisor E es absorbida en el punto x_2, por el aparato registrador-absorbente A, entonces en algún otro sistema de referencia posible, el proceso de absorción en el punto x_2' precede al proceso de emisión en el punto x_1', por lo que se viola el principio de la causalidad microscópica, ya que la consecuencia (registro de la partícula) precede a la causa (emisión de la partícula). Ahora bien, si los procesos de emisión y absorción, asociados a las partículas ultralumínicas, no son considerados por separado y se analizan como un proceso único de emisión-absorción o absorción-emisión, es decir, no sólo se considera posible el registro único del proceso de absorción de la partícula, sino se supone realizable sólo el registro de todo el proceso simultáneamente en ambos puntos x_1 y x_2, entonces no surgirá contradicción alguna con el principio de la causalidad. De esta manera, la teoría de la relatividad no se contradice con la suposición de la existencia de objetos puntuales que se mueven con velocidad ultralumínica emitidos y absorbidos por partículas comunes en distintos puntos espaciales.

No obstante, la sucesión de los procesos de emisión y absorción para estos objetos es relativa; es decir, depende de la elección del sistema de referencia. Tales partículas ultralumínicas hipotéticas (tachyon) se representan en un sistema de referencia en el que se mueven del punto x_1 al punto x_2, y en otro sistema, del punto x_2' al punto x_1' (véase [9]).

Además del efecto de desincronización, se tienen aún dos efectos cinemáticos de la teoría de la relatividad (ya de segundo orden) que más impresionan la imaginación: son los efectos de reducción de las escalas en movimiento y la disminución de la marcha de los relojes en movimiento.

Cambio de la longitud de los cuerpos en movimiento. Sea que algún cuerpo se mueve respecto de un sistema de referencia inmóvil S con velocidad v. Supóngase que se fija al cuerpo un sistema de referencia S', y supóngase que comparando con escalas estándares establecidas en dicho sistema primado, se ha encontrado que la longitud del cuerpo es ℓ_0.

Generalmente, a la longitud ℓ_0 se le llama **longitud propia** y al sistema S' su **sistema propio de referencia**.

Por longitud del cuerpo en movimiento, corresponde obviamente considerar las distancias entre las posiciones de sus extremos registradas, en el sistema inmóvil de referencia en un mismo momento de tiempo.

La simultaneidad en la medición de las posiciones de los extremos del cuerpo es una condición necesaria del experimento. La violación de esta condición conllevaría a que la longitud medida pudiera ser incluso negativa.

Si los extremos del cuerpo están distribuidos en el plano perpendicular al vector velocidad $\vec{v}$ (fig.1.8*a*), la medición de su longitud en ambos sistemas S y S' dará un mismo valor para ℓ_0, ya que $y' = y$ y $z' = z$. La elección del momento de medición tampoco se refleja en la longitud medida, pues la sustitución de $x_2 = x_1$ y $t_2 = t_1$ en (1.26) conlleva a que $t_2' = t_1'$; esto es, el registro de las posiciones de los extremos del cuerpo se realiza en un mismo instante de tiempo tanto en el sistema S como en S'.

Sin embargo, el cuadro cambia esencialmente si el cuerpo es acomodado a lo largo del eje x; es decir, a lo largo del movimiento (fig.1.8*b*).

Si en el sistema S los momentos de registro de las posiciones de los extremos del cuerpo coinciden ($t_2 = t_1$), entonces debido a la relatividad de la simultaneidad de eventos espacialmente separados, en el sistema S' estos momentos ya no coinci-

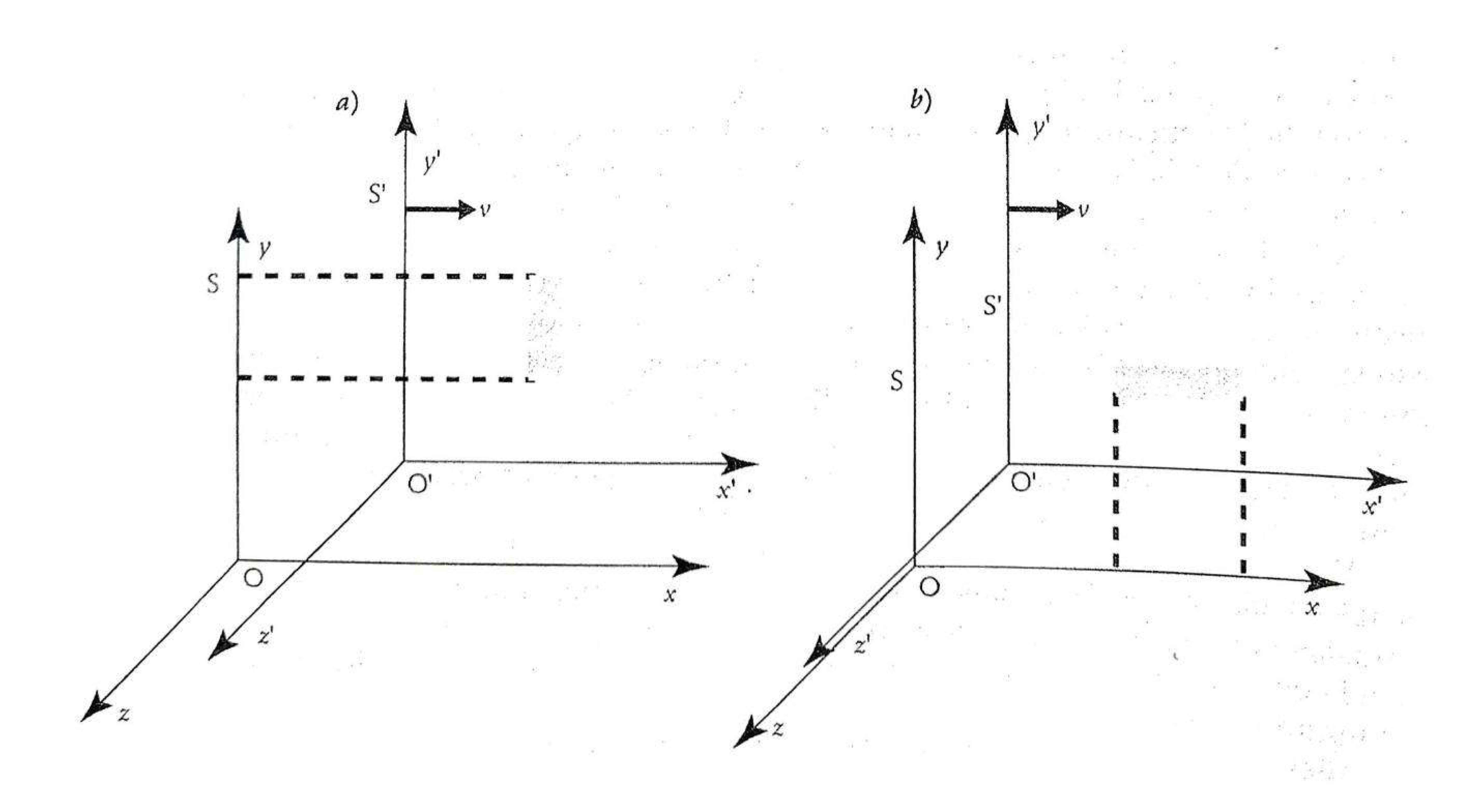


Figura 1.8. Reducción de la longitud de un cuerpo:
a) no pasa nada, *b*) hay reducción.

dirán. Por eso, el resultado de la medición de la longitud se diferencia de ℓ_0, ya que ℓ_0 se obtendrá sólo con la condición:

$$t'_1 = t'_2.$$

Desde el punto de vista del observador en el sistema S, la longitud del cuerpo es igual a:

$$\ell = x_2 - x_1 \tag{1.32}$$

con la condición $t_2 = t_1$. Debido a que $x'_2 - x'_1 = \ell_0$, entonces desde (1.24) se tiene que $\ell_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma\ell$, de donde:

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.33}$$

De esta manera, el cuerpo que se mueve se reduce en la dirección de su movimiento. La reducción de la longitud (1.33) tiene la misma forma que la fórmula de Fitzgerald, pero la velocidad contenida en ella v ya no es la velocidad del cuerpo respecto del éter, como sucede en el caso de Fitzgerald, sino que es la velocidad relativa de los sistemas de referencia S y S'. Por eso, a diferencia de la fórmula de reducción (1.26), la relación (1.33) posee carácter reversible, relativo.

Realmente, si se fija el sistema S al cuerpo y luego se mide su longitud en el sistema S', es necesario considerar:

$$\ell_0 = x_2 - x_1, \quad \ell = x'_2 - x'_1, \quad t'_2 = t'_1 \tag{1.34}$$

Ahora, para la obtención de la relación entre ℓ y ℓ_0 es necesario utilizar ya no la expresión (1.24), sino las relaciones análogas que surgen de las transformadas inversas de Lorentz:

$$x_2 - x_1 = \gamma[(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)] \tag{1.35}$$

$$t_2 - t_1 = \gamma\left[(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)\right] \tag{1.36}$$

Si se coloca de acuerdo con (1.34) en la primera de estas fórmulas $t'_2 = t'_1$, se obtiene $x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1)$; es decir, de nuevo (1.33):

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \ell_0\sqrt{1 - \beta^2},$$

donde a β se le ha asignado la cantidad $\frac{v}{c}$. Así, para dos SIR dados la cantidad β es constante.

Por consiguiente, durante la medición de la longitud de un cuerpo en movimiento siempre se descubre su reducción. Al mismo tiempo, por la fórmula de Fitzgerald el cuerpo sólo se reduce en el caso cuando éste es observado desde un sistema de referencia que ha sido fijado al éter; entonces, desde un sistema en movimiento debe parecer alargado.

Y así, en la teoría del éter el efecto de reducción es absoluto, mientras que en la teoría de la relatividad es relativo y está condicionado por la relatividad de la simultaneidad de eventos espacialmente separados.

Cambio de la marcha de los relojes en movimiento. Para la medición de la marcha del reloj C', el cual se mueve con velocidad v respecto de un sistema de referencia S inmóvil, es necesario asociarle un sistema de referencia S' y comparar sus lecturas con las de los relojes sincronizados C_1 y C_2 colocados correspondientemente en los puntos x_1 y x_2 del sistema S. Ahora se realizará la comparación en los momentos cuando el reloj C' pasa frente a los puntos dados (fig. 1.9).

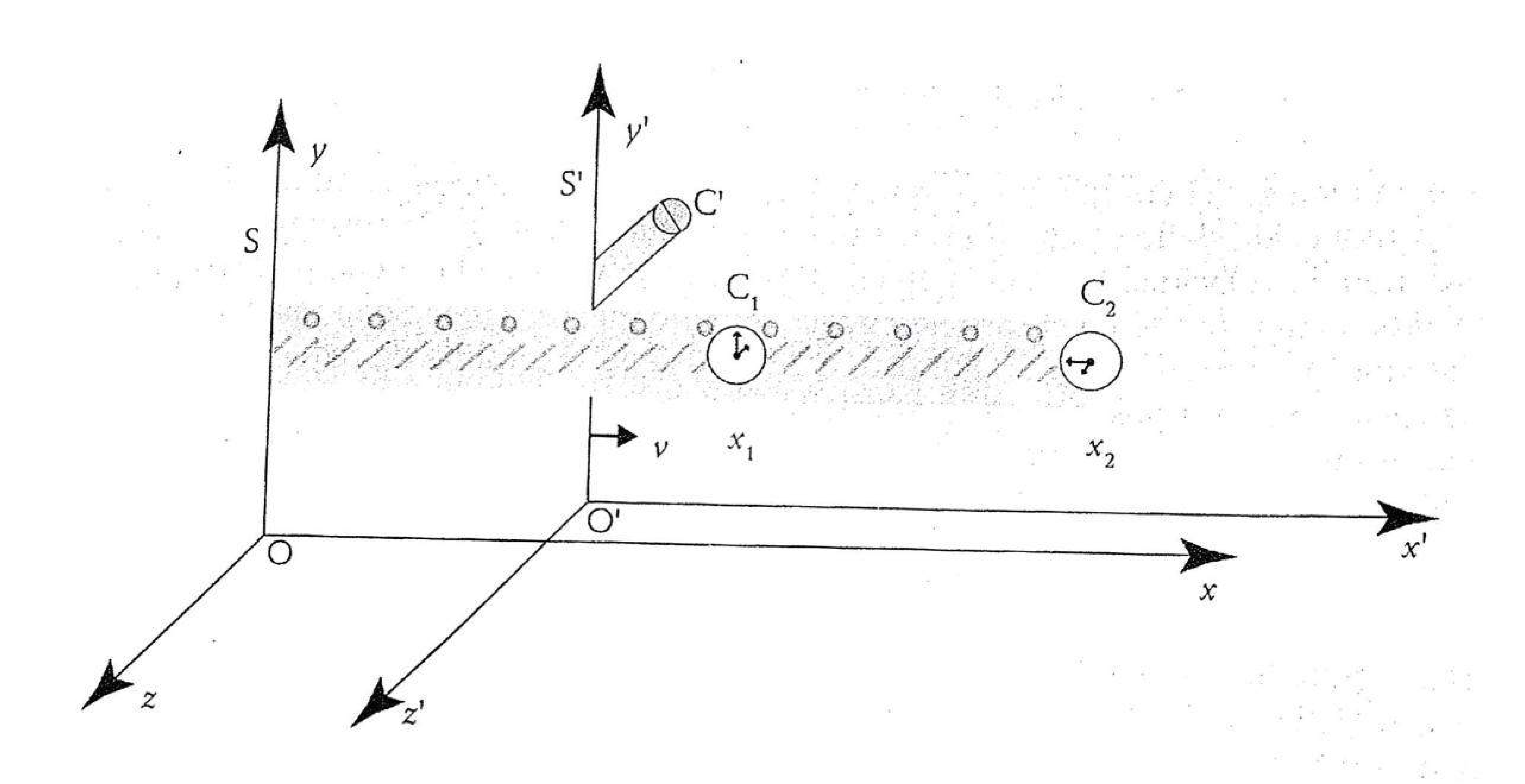


Figura 1.9. Cambio de la marcha de relojes asociados a diferentes SIR. Observación desde S.

Sea que en estos momentos las lecturas de los relojes C_1 y C_2 son correspondientemente iguales a t_1 y t_2; y las lecturas del reloj C': t'_1 y t'_2.

Si se introducen los intervalos de tiempo correspondientes $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ y $\tau = t_2 - t_1$ (τ_0 generalmente es llamado **tiempo propio** del sistema de referencia fijado al cuerpo en movimiento) y se considera además que la posición del reloj C' no cambia, es decir, que $x'_2 = x'_1$, se obtiene desde (1.24)-(1.25) o (1.36) que

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

o

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.37}$$

Así, el intervalo de tiempo medido por relojes en movimiento es menor; esto es, sus marchas disminuyen. Ello significa que *en un sistema de referencia inmóvil todos los procesos en objetos que están en movimiento suceden más lentamente.*

Como consecuencia de la equivalencia de los sistemas S y S', este efecto debe ser reversible; es decir, no sólo la marcha de los relojes C' del sistema S' se hace más lenta en relación con la marcha de los relojes C del sistema S, sino también a la inversa: la observación en el sistema S' debe mostrar la reducción de la marcha de los relojes C respecto de la marcha de los relojes C'. La no contradicción de esta afirmación puede aclararse de la siguiente manera; para la medición de la marcha de los relojes C del sistema S desde el sistema en movimiento S', se deben poseer en S' dos relojes C_1' y C_2' ubicados en ciertos puntos x_1' y x_2' (fig. 1.10). Así, podrán tomarse las lecturas simultáneamente del reloj C y del C_1', cuando el primero pasa frente al segundo, y luego cuando C pasa frente a C_2'. Debido a que este procedimiento no se distingue del realizado antes para el sistema S, no es asombroso que se obtenga el mismo resultado que en (1.37).

Como se observa, de nuevo todo se reduce a la relatividad de la simultaneidad de eventos espacialmente separados: las lecturas coincidentes de los relojes C_1' y C_2' no serán tales en el sistema S y viceversa, las lecturas de los relojes C_1 y C_2 serán diferentes en el sistema en movimiento S'.

Como ya se había visto, el efecto de reducción de la marcha de los relojes en movimiento puede obtenerse desde el efecto de reducción de las escalas de los cuerpos en movimiento y por eso, el carácter reversible de ambos efectos está condicionado por una misma causa: la relatividad de la simultaneidad de eventos espacialmente separados.

Experimentalmente, la fórmula (1.37) fue comprobada en estudios de la radiación cósmica. En las capas superiores de la atmósfera donde se encuentran protones rápidos, sucede el frenado de dichas partículas con el consecuente naci-

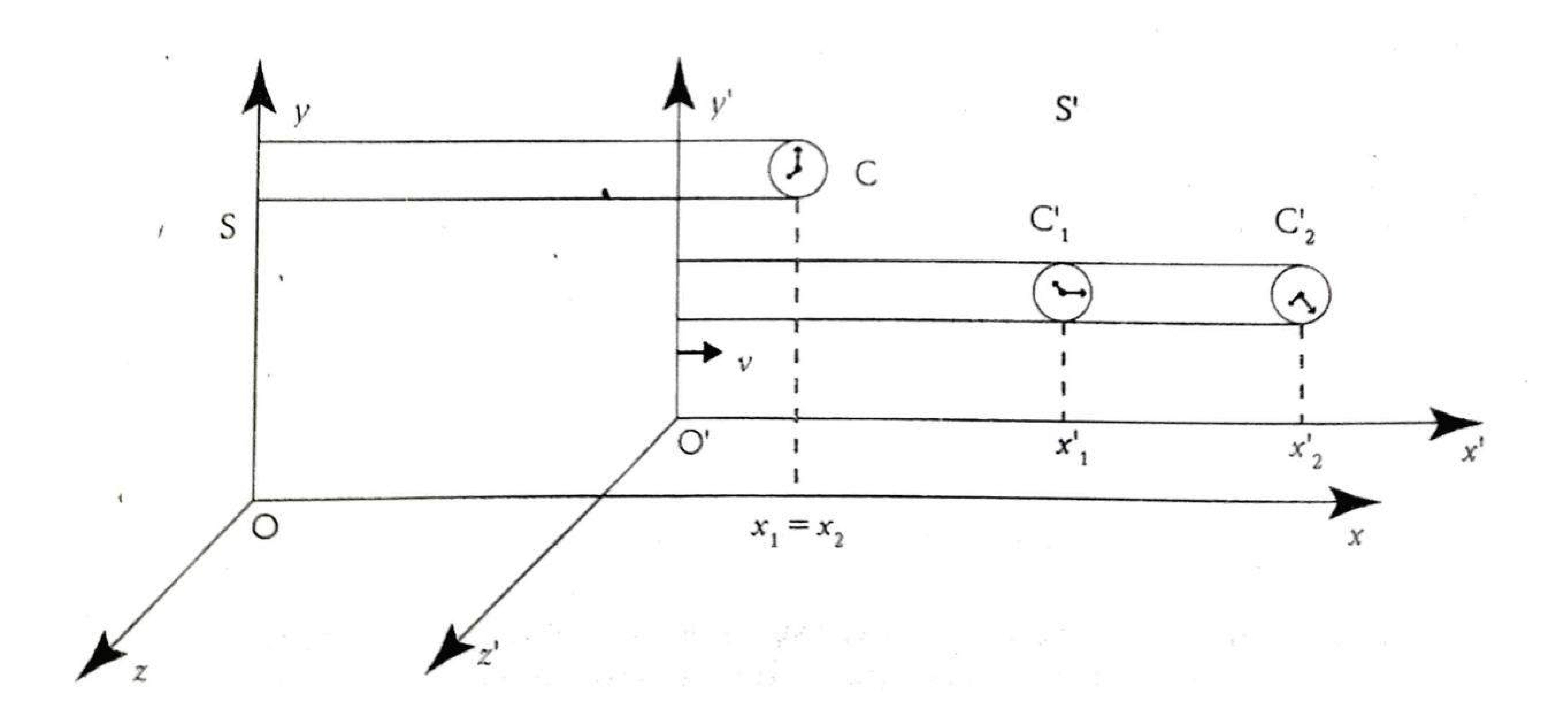


Figura 1.10. Cambio de la marcha de relojes asociados a diferentes SIR. Observación desde S'.

miento intensivo de partículas más ligeras, en particular de electrones, positrones y $\mu^{\pm}$-mesones. Estos últimos son inestables y se desintegran a la vez, según la ley:

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu + \tilde{\nu},$$

que producen el par neutrino-antineutrino $\nu\tilde{\nu}$ y un electrón (o positrón). El periodo medio de desintegración para los mesones lentos es aproximadamente de $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ s.

Durante ese tiempo, los μ-mesones aun si se movieran con la velocidad de la luz alcanzarían a penetrar en la atmósfera sólo a una profundidad de $\ell = c\tau_0 \cong 0.66$ km; es decir, no alcanzarían la superficie de la Tierra. En realidad, se descubre un flujo intensivo de μ-mesones rápidos en las cercanías de la Tierra, lo que habla sobre la prolongación del tiempo de vida de los μ-mesones rápidos en comparación con los lentos.

La reducción del tiempo expresada por la fórmula (1.37) es comprobada diariamente durante la medición de los tiempos de vida de las partículas elementales no estables que surgen durante los experimentos con partículas de altas energías obtenidas en los aceleradores.

Paradoja de los relojes. En el punto anterior se indicó que el efecto de reducción de la marcha de los relojes que se mueven respecto del sistema de referencia del observador, en sí mismo no es paradójico, ya que se explica con base en la relatividad de la simultaneidad de eventos espacialmente separados.

Sin embargo, el olvido de esta circunstancia o el trato superficial de este efecto, conllevan a una contradicción enunciada generalmente como la **paradoja de los gemelos**. En esencia, su contenido es el siguiente:

Sea que se tienen dos relojes A y B, el primero de los cuales ha sido fijado a un SIR S considerado inmóvil. Ambos relojes en el momento $t = 0$ se encuentran juntos. Luego, el reloj B se desplaza hasta una distancia suficientemente grande ℓ y de nuevo regresa junto al reloj A. Para simplificar, supóngase que el reloj B se alejó y regresó con una velocidad constante v, y el tiempo en el transcurso del cual su velocidad cambió, es pequeño en comparación con $2\frac{\ell}{v}$.

En esta aproximación el tiempo de recorrido del reloj B medido por el reloj A obviamente es igual a:

$$\tau = 2\frac{\ell}{v} \tag{1.38}$$

Mientras tanto, B marca el tiempo:

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\beta^2} \tag{1.39}$$

Se ha considerado que la aceleración experimentada por el reloj B es despreciable, por lo que no influye en su marcha (fig. 1.11); por consiguiente, al término de su recorrido las lecturas de B serán menores que las lecturas de A en:

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 = 2\frac{\ell}{v}\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right) \tag{1.40}$$

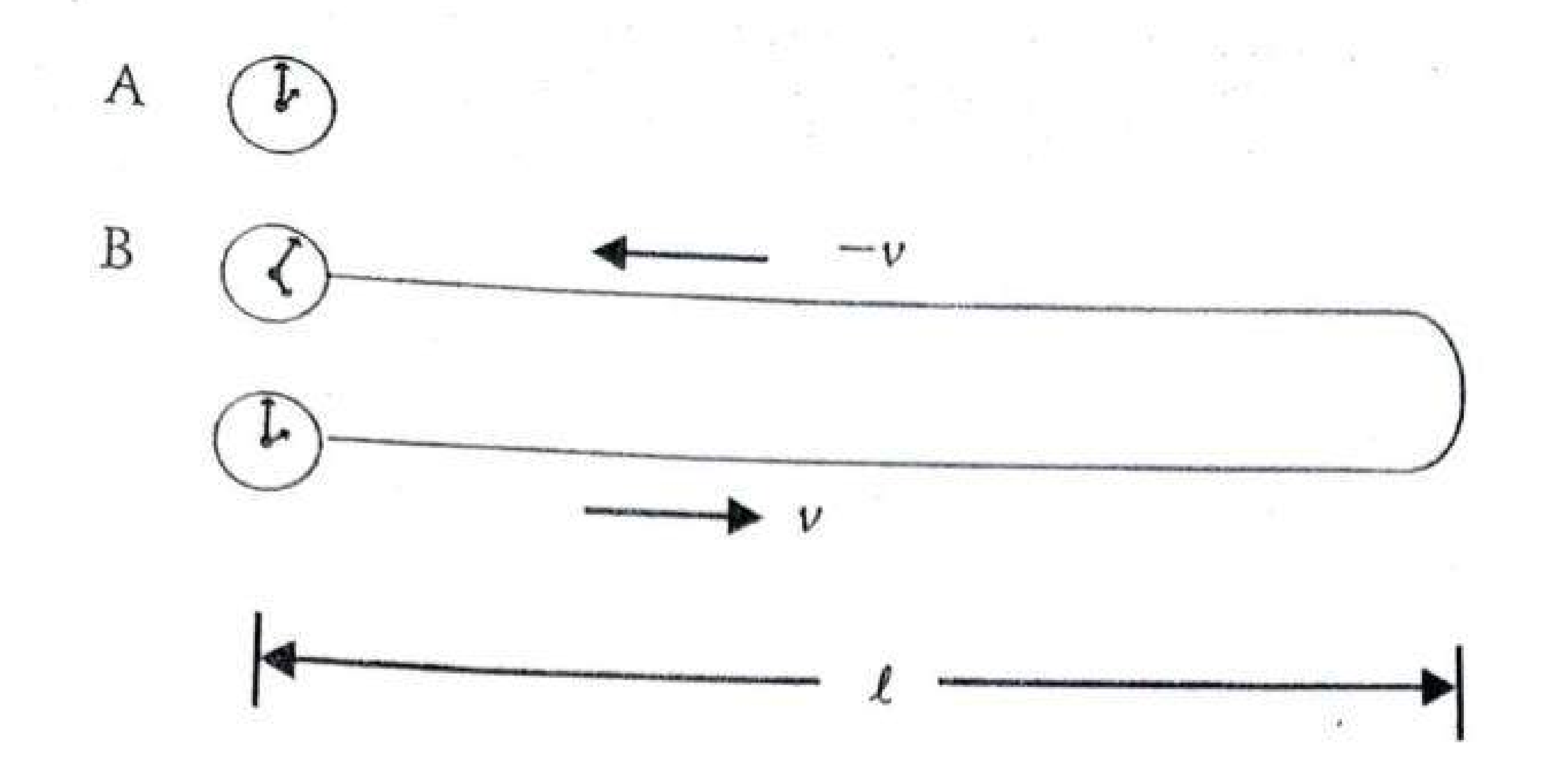


Figura 1.11. Paradoja de los relojes. El reloj A está fijo en el SIR S, mientras que el reloj B está fijo en el SIR S', entonces B se retrasa respecto de A. Sin embargo, si el observador se encuentra junto a B y A es el reloj en movimiento, entonces, ¡A se retrasa respecto de B!

Si la distancia ℓ es suficientemente grande entonces ese tiempo puede ser significativo aun para movimientos con velocidades no relativistas: $v << c$. Realmente, en este caso,

$$\Delta\tau \cong \frac{\ell v}{c^2} \tag{1.41}$$

La paradoja surge si en correspondencia con el principio de la relatividad, son repetidos los razonamientos considerando inmóvil ya no al reloj A sino al reloj B. De esta manera, pareciera ser que las lecturas del reloj A deben ser menores que las del reloj B, en una cantidad también igual a $\Delta\tau$; pero debe retardarse un solo reloj, ya que al final del experimento los relojes A y B se encuentran en un mismo punto y la relación de sus lecturas es un hecho real, independiente del procedimiento de medición.

Si resultan menores las lecturas del reloj B significará que en el sistema S' a él fijado todos los procesos, incluyendo los biológicos, sucedieron más lentamente. Esto explica, por ejemplo, que si uno de los mellizos es colocado en el sistema S y el otro en S', entonces el segundo mellizo regresará de su viaje más joven que el primero; sin embargo, al elegir el sistema S' como origen y ubicación del observador, resultará que debe parecer más joven el primer mellizo.

La paradoja se elimina al señalarse que en realidad, los sistemas S y S' no son equivalentes, ya que el sistema S' no es inercial como consecuencia del cambio de velocidad que experimenta el reloj B al cambiar su dirección de movimiento para regresar.

Por eso, durante la descripción del experimento en el sistema S' ya no se debe utilizar la fórmula $\tau = \tau_0/\sqrt{1-\beta^2}$ deducida con la suposición de que ambos sistemas de referencia eran inerciales. Al ser frenado el reloj B, evidentemente debe ser establecida de nuevo su sincronización en el sistema S' y la diferencia surgida de esta manera, como no es difícil de observar, conducirá a la reducción de la marcha del reloj B en comparación con la del reloj A.

Para cerciorarse de ello, en el sistema S' serán establecidos dos relojes B y B' separados por una distancia $\ell\sqrt{1-\beta^2}$, que es precisamente la distancia medida en el sistema S' a que deberá alejarse el reloj A. Las lecturas de ambos relojes serán comparadas con las lecturas correspondientes del reloj A.

Dado que el proceso es simétrico será analizada sólo la primera parte del problema cuando los relojes se alejan y posteriormente frenan. El sistema S' es inercial mientras se mueve con velocidad constante v. Por esto, las lecturas de los relojes B y B' medidas en el sistema S deben diferenciarse en $\Delta\tau$ determinado por la fórmula (fig. 1.12)

$$\Delta\tau = \gamma\frac{\ell v}{c^2}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\ell v}{c^2} \tag{1.42}$$

Precisamente esta discordancia debe ser considerada durante el frenado del sistema S'.

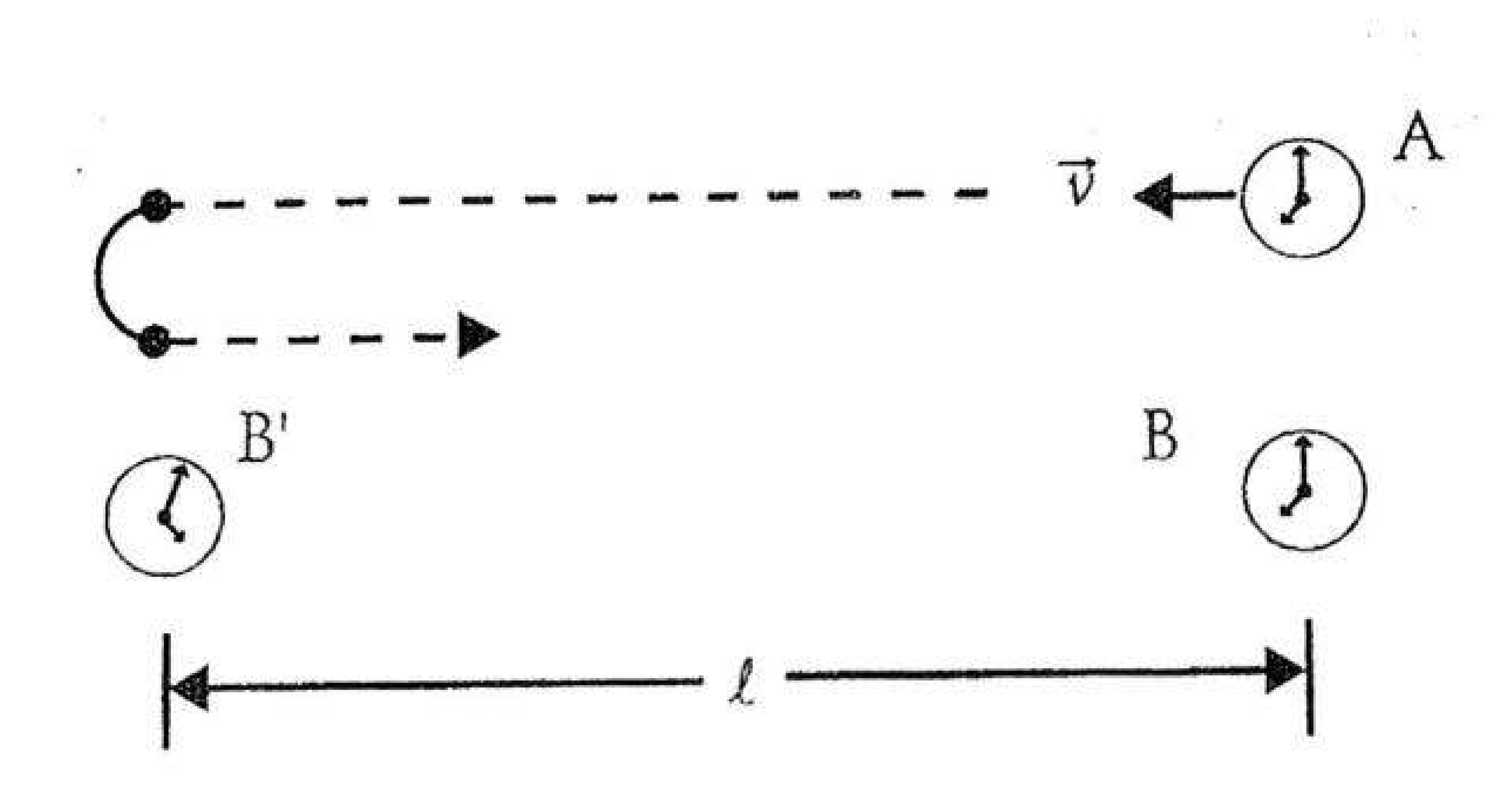


Figura 1.12. Solución de la paradoja de los relojes. B y B' permanecen fijos en S' mientras A se mueve junto con S. La diferencia de tiempo mostrada por B y B' no es la misma antes de la vuelta de A, que después de la vuelta de A. Hay desincronización de los relojes B y B' durante la vuelta de A; es decir, S y S' dejan de ser inerciales durante la vuelta.

En realidad, al momento de frenado del reloj B', éste debe mostrar el tiempo $\tau_0 = \left(\frac{v}{\ell}\right)\sqrt{1-\beta^2}$, mientras que el reloj A junto con B' deberá mostrar un tiempo $t' = \left(\frac{\ell}{v}\right)\sqrt{1-\beta^2}$; sin embargo, como ya se aclaró, durante el frenado del sistema S' no se debe utilizar esta fórmula, pues la sincronización de los relojes B y B' debe ser realizada de nuevo. Por eso, la lectura real de A en el momento de frenado se diferencia de τ' precisamente en la magnitud de discordancia (1.42) y es igual a

$$\tau + \Delta\tau = \frac{\ell}{v} \tag{1.43}$$

Desde esta última expresión es fácil deducir que la diferencia de las lecturas de los relojes A y B, considerando la segunda mitad del proceso, de nuevo se describirá por la fórmula (1.40). No hace mucho este efecto fue comprobado con experimentos directos durante los cuales eran tomadas las lecturas de un reloj de cesio previamente fijado a un avión reactor en movimiento alrededor de la Tierra y las de otro que estaba en reposo en ella.

Suma relativista de las velocidades. Sea que en el sistema S' cierto movimiento está dado por las siguientes ecuaciones:

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t') \tag{1.44}$$

Supóngase que a dicho movimiento le corresponde en el sistema S la siguiente descripción:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1.45}$$

Se quiere establecer la relación entre las componentes de la velocidad en S':

$$\frac{dx'}{dt'} = u'_x = u' \cos\alpha', \quad \frac{dy'}{dt'} = u'_y = u' \operatorname{sen}\alpha' \tag{1.46}$$

$$\frac{dz'}{dt'} = u'_z, \quad u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z}$$

y las correspondientes magnitudes en el sistema S:

$$\frac{dx}{dt} = u_x = u\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = u_y = u \operatorname{sen}\alpha \tag{1.47}$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z, \quad u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

donde α y α' son los ángulos que forman las velocidades $\vec{u}$ y $\vec{u}'$ medidos a partir de los ejes x y x', respectivamente. Desde las fórmulas de transformación inversa de Lorentz se obtiene mediante diferenciación que

$$dx = \gamma(dx' + v dt'); \quad dy = dy'; \quad dz = dz' \tag{1.48}$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2} dx'\right)$$

Si se divide luego miembro a miembro cada una de estas expresiones entre la expresión correspondiente de dt, se encuentra

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

$$u_y = u'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \qquad (1.49)$$

$$u_z = u'_z \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

Las expresiones (1.49) llevan el nombre de *suma relativista de las velocidades*. Dicha suma relaciona las componentes de velocidad de un objeto asociado al sistema S con las correspondientes componentes en otro sistema S'. Las *transformaciones inversas* de (1.49) son, de acuerdo con (1.21) y (1.22), las siguientes:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

$$u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \qquad (1.50)$$

$$u'_z = u_z \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

Algunas relaciones útiles para encontrar la forma vectorial de la suma relativista de las velocidades, pueden consultarse en el apéndice C.

Aberración. Desde las expresiones (1.47) y (1.48) puede observarse que

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{u_y u}{u_x u} = \frac{u_y}{u_x} = \frac{u' \text{ sen } \alpha'}{u' \cos \alpha' + v} \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$\tan\alpha' = \frac{u \text{ sen } \alpha}{u \cos \alpha - v} \sqrt{1 - \beta^2}$$

Las fórmulas así obtenidas definen el cambio de dirección de la velocidad durante el paso de un SIR a otro. Como un caso particular de importancia, analícese

la desviación de la luz al ser ésta observada desde diferentes SIR, fenómeno que recibió el nombre de *aberración de la luz*.

En este caso,

$$u = u' = c$$

y finalmente se obtiene que

$$\tan \alpha = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\beta + \cos \alpha'}$$

Suponga enseguida que en el SIR S' a lo largo del eje y' se propaga un rayo de luz; es decir,

$$u'_x = 0; \quad u'_y = c; \quad u'_z = 0 \tag{1.51}$$

Mientras tanto, en el SIR S se tiene

$$u_x = v; \;\; u_y = \frac{c}{\gamma}; \;\; u_z = 0 \tag{1.52}$$

Por consiguiente, en el sistema de referencia inmóvil el rayo forma un ángulo α con el eje y, definido por la relación

$$\tan \alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{c}{v\gamma} \tag{1.53}$$

Cuando $\frac{v}{c} << 1$ tiene lugar el siguiente desarrollo

$$\gamma^{-1} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} = 1 + \frac{\beta^2}{2} \tag{1.54}$$

Entonces, la fórmula (1.53) puede escribirse con precisión de una magnitud de segundo orden en la forma siguiente:

$$\tan \alpha \approx \beta^{-1} \tag{1.55}$$

Esta última expresión coincide con la fórmula[4] que se obtiene desde la teoría clásica, aun cuando el contenido sea otro. En la teoría clásica es necesario distinguir el caso de una fuente en movimiento con un observador en reposo y el de un observador en movimiento cuando la fuente se encuentra en movimiento.

En la teoría de la relatividad se tiene sólo el caso del movimiento relativo entre la fuente y el observador.

Desde las fórmulas (1.51) se sigue que la suma de las velocidades de los procesos analizados nunca puede ser mayor que la velocidad de la luz en el vacío. Sea que

$$u'_y = u'_z = 0; \quad u'_x = c$$

[4]En algunos manuales de física el ángulo α se mide a partir del eje y, por lo que la expresión (1.55) se escribe entonces como $\tan \alpha \cong \beta$.

Entonces, desde las fórmulas mencionadas se encuentra lo siguiente:

$$u_x = c + v + \frac{vc}{c^2} = c; \quad u_y = 0; \quad u_z = 0$$

Claro, este resultado es completamente natural porque las mismas fórmulas fueron obtenidas a fin de cuentas desde la condición de constancia de la velocidad de la luz y de su igualdad para todos los sistemas inerciales de referencia.

Ejemplo 1.9.1

En una galaxia muy distante de la Tierra, explota una supernova (evento 1), y luego de un tiempo ésta se apaga (evento 2). Calcular la distancia entre estos dos eventos medida por un observador desde la Tierra.

Solución. Para el observador en la Tierra la galaxia se mueve con cierta velocidad v. Por eso, para la supernova mencionada, $x'_1 = x'_2$ y $t'_1 \neq t'_2$. Si se sustituye esto último en las expresiones inversas a (1.35) y (1.36), se tiene

$$x_2 - x_1 = \gamma[(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)] = \gamma v(t'_2 - t'_1) \tag{1.56}$$

$$t_2 - t_1 = \gamma\left[(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)\right] = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

De esta última expresión se tiene que $t'_2 - t'_1 = \gamma^{-1}(t_2 - t_1)$. Al sustituir en la primera expresión se obtiene lo siguiente:[5]

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$$

Ejemplo 1.9.2

La partícula μ-mesón tiene un tiempo medio de vida de 2.2×10^{-6} s aproximadamente. Determinar las distancias recorridas por el μ-mesón respecto de un observador en el laboratorio, en los siguientes casos:

a) Cuando la velocidad de la partícula es de $0.1c$, y
b) Cuando la velocidad de la partícula es de $0.6c$.

Solución. De acuerdo con la expresión (1.37), $t'_2 - t'_1 \equiv \tau_0 = 2.2 \times 10^{-6}$ s y $(t_2 - t_1) = \tau$ es el tiempo de vida observado del μ-mesón, $x'_2 - x'_1 = 0$, ya que el μ-mesón está en reposo en el sistema propio de referencia. Entonces, desde las transformadas inversas de Lorentz para dos eventos se tiene que

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

por eso

[5] ¿Quién en realidad se ha desplazado en el espacio?

a) $v = \frac{1}{10}c$ y $\tau = \frac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-0.01}}\text{s} = 2.21\times10^{-6}\text{s}.$

Por eso, la distancia recorrida será $d = \tau(0.1c) = 66.3$ m

b) En este caso, $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 0.36$. Por eso $\tau = \frac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-0.36}}\text{s} = 2.75\times10^{-6}\text{s}.$

En este caso, $d = 495$ m.

Ejemplo 1.9.3

La longitud propia de una partícula proyectil es de 1 Å. Suponiendo que la velocidad alcanzada por dicho proyectil es la mitad de la velocidad de la luz en el vacío, determinar la reducción observada de su longitud cuando alcanza el máximo de velocidad.

Solución. Desde la expresión (1.33) se sigue que

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = (10^{-10}\,\text{m})\sqrt{1-\left(\frac{c}{2c}\right)^2} = 0.86\ \text{Å}$$

Por eso, la longitud de la partícula se reduce en la dirección de su movimiento en la cantidad

$$\ell_0 - \ell = 0.14\ \text{Å}$$

Ejercicio 1.9.1

Encontrar la velocidad de un objeto cuya longitud observada es $\frac{9}{10}$ de su longitud propia.

Solución: 1.3×10^8 m/s.

Ejercicio 1.9.2

Una partícula viaja con una velocidad de n veces la velocidad de la luz en el vacío ($0 < n < 1$). Determinar el tiempo observado de vida de dicha partícula considerando que τ_0 es su tiempo propio.

Solución: $\frac{\tau_0}{\sqrt{1-n^2}}$

1.10. RELATIVIDAD DE LA MASA

Entre las consecuencias dinámicas de la teoría de la relatividad se encuentra la variación de la masa con respecto a la velocidad y también la equivalencia de la masa y la energía.

Sea un choque elástico (es decir, un choque durante el cual se conserva la energía cinética) entre dos partículas A y B con sus correspondientes masas, visto por dos observadores desde los sistemas S y S', los cuales como ya es conocido, se encuentran en movimiento relativo uniforme y rectilíneo [10].

Las propiedades de A y B son idénticas cuando se les analiza en sistemas de

referencias respecto de los cuales éstos se encuentran en reposo; por ejemplo, si ambas partículas están inmóviles en el sistema S, sus masas son iguales.

Los sistemas S y S' están orientados según la figura 1.13 y S' se mueve en sentido positivo del eje x respecto de S con velocidad v.

Antes del choque, A se encuentra en reposo en S y B también en reposo, pero en S'. Así, en un mismo instante, A es lanzada en sentido positivo de y a la velocidad v_A mientras que B se lanza en sentido negativo de y' a la velocidad v'_B, siendo iguales las magnitudes de ambas velocidades,

$$v_A = v'_B$$

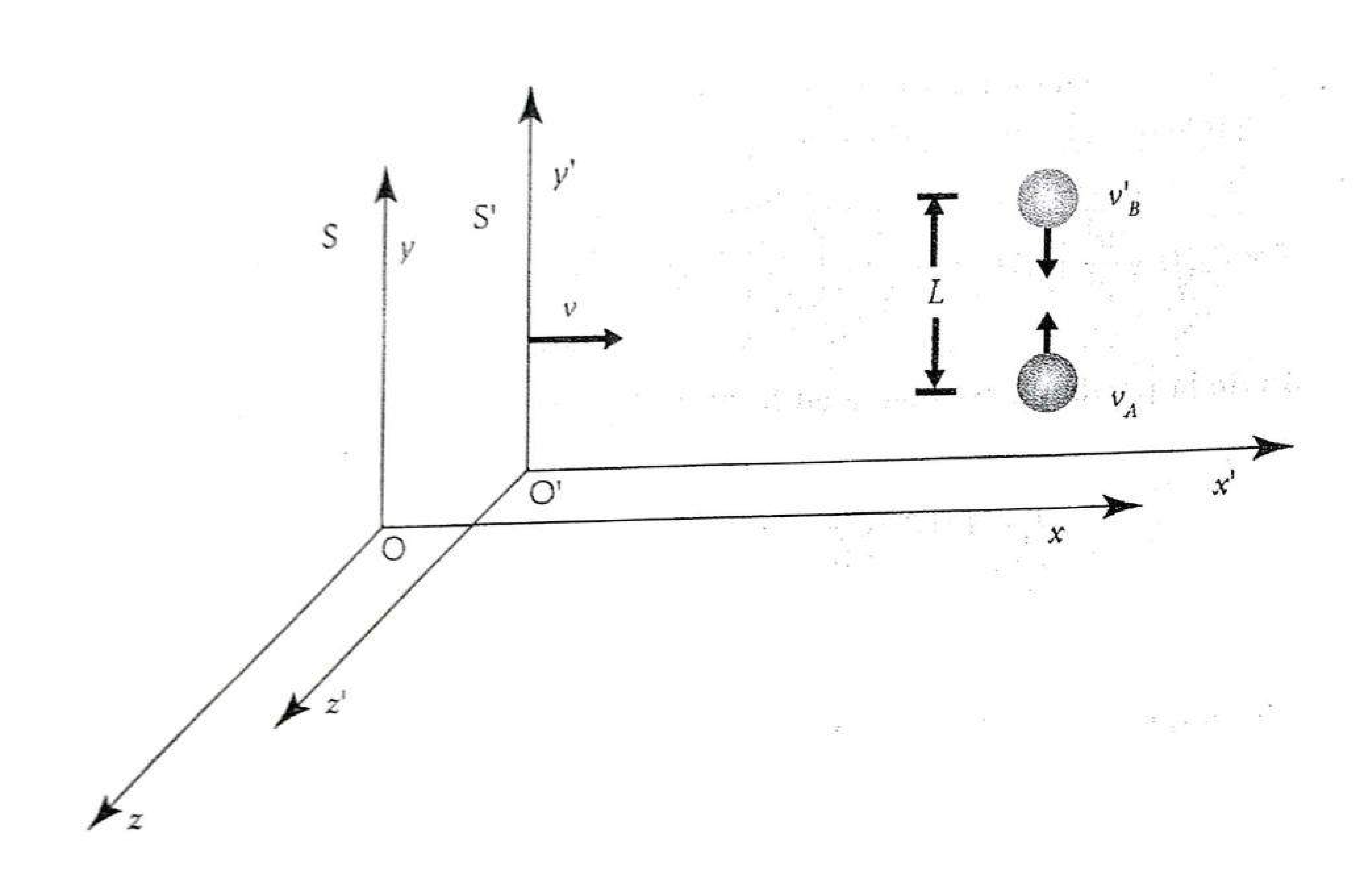


Figura 1.13. Choque elástico entre dos partículas esféricas: v_A es la velocidad de A en S y v'_B es la velocidad de B en S'.

De esta manera, el comportamiento de A visto desde S es exactamente el mismo que el de B visto desde S'. Cuando las dos partículas chocan, ambas rebotan con las mismas velocidades que posean antes del choque, pero en direcciones opuestas. Si las partículas están separadas antes del choque por una distancia L, para un observador en el sistema S el choque ocurre en $y = L/2$, mientras que para otro observador en S' el choque ocurre en $y' = L/2$. El tiempo T que invierte A en el recorrido de ida y vuelta, medido en el sistema S es por tanto igual a

$$T_0 = \frac{2y}{v_A} = \frac{2L}{2v_A} = \frac{L}{v_A},$$

y es el mismo para B desde S':

$$T_0 = \frac{L}{v'_B}$$

Si en S tiene lugar la ley de conservación del momentum,[6] entonces es cierto que

$$m_A v_A = m_B v_B,$$

donde m_A y m_B son las masas de A y B, v_A y v_B sus velocidades medidas en S:

$$v_B = \frac{L}{T},$$

donde T es el tiempo que tarda B en efectuar su recorrido de ida y vuelta medido en S. Sin embargo, en S' el recorrido de B requiere un tiempo T_0 donde $T = \gamma T_0$.

Aunque los observadores en ambos sistemas ven el mismo evento, discrepan en cuanto al intervalo de tiempo que la partícula lanzada desde el otro sistema requiere para efectuar el choque y regresar. De esta manera:

$$v_B = \frac{L}{T} = \frac{L}{\gamma T_0}; \quad v = \frac{L}{T_0},$$

$$m_A v_A = m_B v_B \quad \text{o} \quad \frac{m_A L}{T_0} = \frac{m_B L}{\gamma T_0},$$

de donde

$$m_A = \frac{m_B}{\gamma} = m_B\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \equiv m_B(\beta^2)$$

En S se tiene que $m_A = m_B$ pero en S', $m_A \neq m_B$. Denotando mediante m a m_B en S, y como m_0 a m_A en S', se tiene finalmente

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.57}$$

lo cual es la relación buscada.

Otra forma de obtener la dependencia de la masa respecto de la velocidad se indica en el apéndice B.

Y así, con el aumento de la velocidad del cuerpo su masa aumenta según la ley (1.57) y cuando la velocidad de dicho cuerpo se aproxima a la velocidad de la luz en el vacío, la misma crece ilimitadamente; sin embargo, se puede analizar la relación (1.57) de otra manera. De acuerdo con esta fórmula, la masa del cuerpo es una magnitud relativa. Debido a que en diferentes sistemas de referencia la velocidad del cuerpo es distinta, entonces la masa del cuerpo con base en (1.57) será diferente en distintos sistemas de referencia. Es magnitud invariante sólo la masa en reposo m_0.

En calidad de ejemplo, hay que analizar la aceleración de una partícula cargada en el ciclotrón (fig. 1.14).

[6]En los libros universitarios de texto, la cantidad $m\bar{v}$ es mencionada como: ímpetu, impulso o momentum. En sus famosos *Principia*, Newton utilizó "cantidad de movimiento" para denotar lo mismo. En este curso utilizaremos la designación momentum.

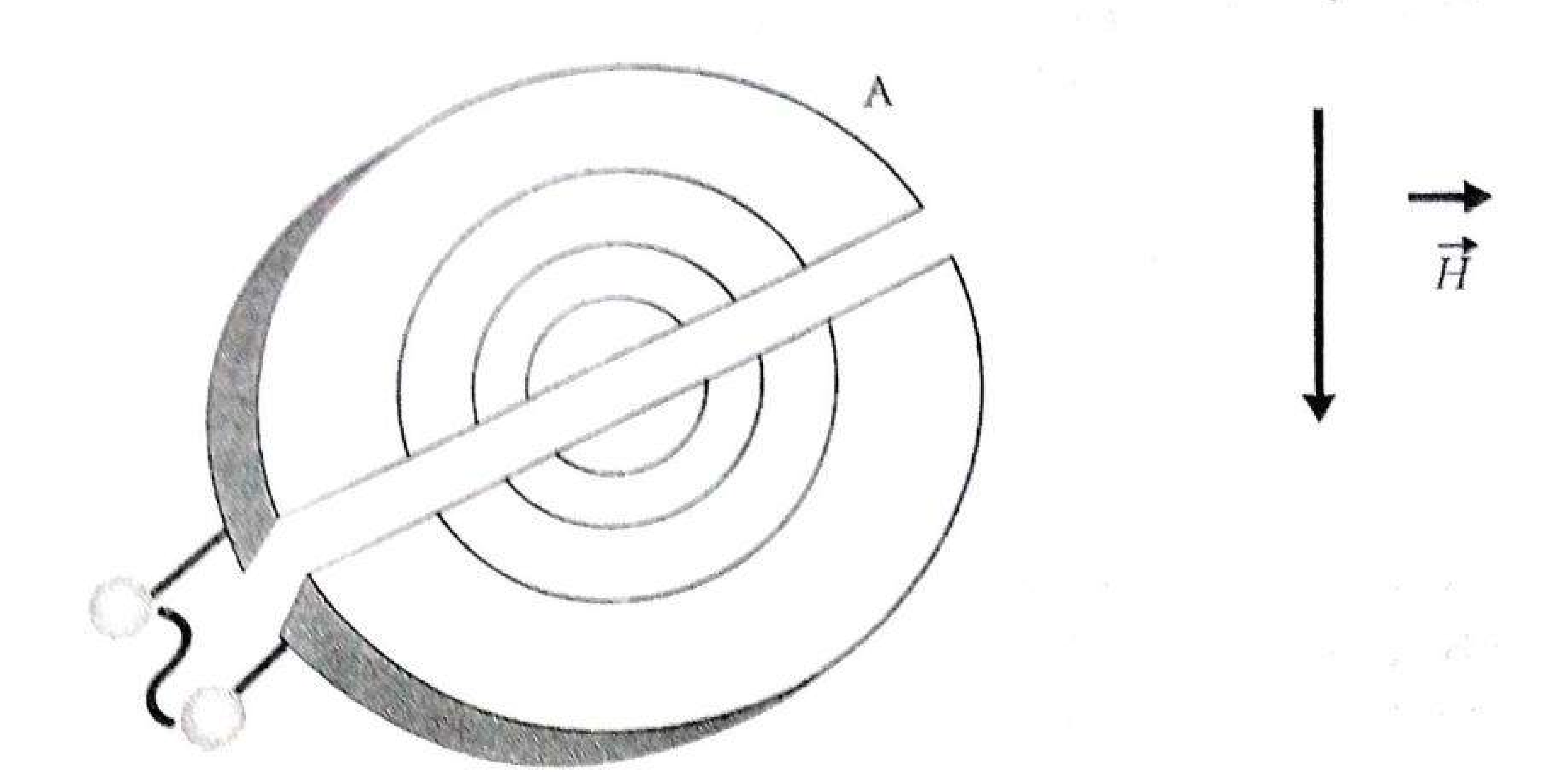


Figura 1.14. Apreciación simple de un ciclotrón.

Como es sabido, el ciclotrón consiste en dos semidiscos huecos metálicos que se encuentran en un campo magnético perpendicular al plano de los mismos. Estos semidiscos son conectados a una tensión eléctrica alterna de frecuencia ω_0.

En la abertura existente entre los semidiscos se coloca una fuente de partículas cargadas (iones). Bajo la acción del campo eléctrico en la abertura, las partículas son aceleradas y penetran a uno de los semidiscos, teniendo para esto ya cierta velocidad inicial u. Dentro del semidisco el campo eléctrico no existe y la partícula se mueve bajo la acción del campo magnético homogéneo cuya intensidad es $\vec{H}_0$.

Ahora será analizado con más detenimiento, el carácter del movimiento de la partícula dentro del semidisco. La fuerza que actúa sobre una partícula cuya carga es q y que está inmersa en un campo magnético, es la así denominada *fuerza de Lorentz*. Esta última es proporcional al producto vectorial de la velocidad con la intensidad del campo magnético:

$$\vec{F} = \frac{q}{c}(\vec{u} \times \vec{H})$$

Debido a que esta fuerza es perpendicular a la velocidad de la partícula, no realiza sobre ella trabajo alguno; por eso, la energía de la partícula y la magnitud absoluta de su velocidad quedan invariables durante el movimiento dentro del semidisco y, por consiguiente, la masa de la partícula según (1.57)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

será una magnitud constante.

La ecuación general de movimiento para este caso tiene la forma

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{q}{c}(\vec{u} \times \vec{H}) \tag{1.58}$$

En proyecciones sobre los ejes de coordenadas cartesianas y eligiendo como dirección del campo magnético la del eje z, esta ecuación se escribirá como sigue:

$$H_x = H_y = 0;\ H_z \equiv H;$$

$$\frac{du_x}{dt} = \omega u_y;\ \frac{du_y}{dt} = -\omega u_x, \tag{1.59}$$

$$\frac{du_z}{dt} = 0;\ \omega = \frac{qH}{mc}$$

La solución de esta última ecuación indica inmediatamente que

$$u_z = \text{const.}$$

Al analizar las partículas que se mueven paralelamente al plano de los semidiscos (las partículas que se mueven con cierto ángulo respecto del plano de los semidiscos caerán en las tapas de los mismos semidiscos para ser absorbidas en ellas), se puede considerar

$$u_z = 0.$$

Para integrar las primeras dos ecuaciones del sistema (1.59), hay que multiplicar la segunda de ellas por la unidad imaginaria i y sumarle luego a la primera

$$\frac{d(u_x + iu_y)}{dt} = -i\omega(u_x + iu_y) \Rightarrow (u_x + iu_y) = Ae^{-i\omega t},$$

donde la constante A en general es una magnitud compleja y puede ser escrita en la forma

$$A = u_0 e^{-i\alpha},$$

siendo u_0 y α constantes reales. Entonces, se tendrá que

$$u_x = \frac{dx}{dt} = u_0 \cos(\omega t + \alpha), \tag{1.60}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = -u_0 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

Se observa que u representa la magnitud absoluta de la velocidad

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

la cual queda constante durante el movimiento y α determina la dirección de la velocidad inicial

$$\tan\alpha = -\left(\frac{u_y}{u_x}\right)_{t=0}$$

Al integrar (1.60) otra vez, se obtiene:

$$x = \frac{u_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + x_0,$$

$$y = \frac{u_0}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) + y_0,$$

donde x_0 y y_0 son constantes de integración.

Si se excluye el tiempo t de estas últimas igualdades, se llega a la ecuación siguiente:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{u_0^2}{\omega^2} = \frac{mcu_0}{qH}$$

Y así, dentro del semidisco la partícula acelerada se mueve por una circunferencia de radio $R = \frac{mcu_0}{qH}$ y realiza una media vuelta a través de esta circunferencia en un tiempo

$$\tau = \pi \frac{R}{u_0} = \pi \frac{mc}{qH}$$

Para que la partícula en el ciclotrón se acelere, deberá llegar al extremo opuesto de la abertura C, justo en el momento de tiempo cuando el campo eléctrico en dicha parte de la abertura haya cambiado su dirección por la inversa. Por consiguiente, la frecuencia de giro de la partícula en un semidisco $\omega_0 = \frac{\pi}{\tau}$ debe coincidir con la frecuencia de cambio del campo eléctrico alterno ω_0. Esto proporciona la siguiente condición de sincronización:

$$\omega_0 = \frac{qH}{mc}$$

En la región de velocidades no relativistas, la masa de la partícula puede considerarse constante por lo pronto. Esta condición puede satisfacerse eligiendo las magnitudes adecuadas de H y de ω_0.

Sin embargo, cuando se trata de alcanzar velocidades cercanas a la velocidad de la luz en el vacío c, se encuentra una dificultad esencial: cada vez que la partícula realiza una vuelta completa, su velocidad aumenta y por consiguiente, aumenta también su inercia, lo cual es observable desde la expresión (1.57), y la condición de sincronización deja de cumplirse. La partícula empieza a llegar con cierto retraso a la abertura; es decir, después de que el campo alcanzó su máximo en ella y empieza a disminuir su valor. Este retraso es de carácter acumulativo, lo cual indica que después de un número determinado de vueltas la partícula comenzará a frenarse debido al desfasamiento de su movimiento con el campo.

Esto impone un límite en la posibilidad de acelerar partículas en los ciclotrones.

Ejemplo 1.10.1

Determine la masa de un electrón ($m_0 = 9.11 \times 10^{-31}$ **kg**) medida por un observador cuando la velocidad relativa de dicha partícula es de:

a) $\frac{1}{20}c$,

b) $\frac{1}{8}c$.

Solución. Desde la expresión (1.42) se tiene que:

a) $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{9.11 \times 10^{-31}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{c}{20c}\right)^2}}\ \text{kg} = 9.121 \times 10^{-31}\ \textbf{kg}.$

b) $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}} = 9.182 \times 10^{-31}\ \textbf{kg}.$

1.11. ALGUNAS EXPRESIONES DE LA MECÁNICA RELATIVISTA

Si la segunda ley de Newton es colocada en la forma vectorial siguiente:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \qquad (1.61)$$

entonces, su generalización relativista se escribirá como sigue:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right) = \vec{F} \qquad (1.62)$$

En mecánica clásica, la ecuación de movimiento puede escribirse también de la forma

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

donde $\vec{p}$ es el momentum.

De esta manera, se observa que en **mecánica relativista** el papel del **momentum** lo desempeña la magnitud

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = m\vec{v} \qquad (1.63)$$

La relación entre la fuerza $\vec{F}$ y la aceleración $\vec{a}$, deducida desde (1.61), puede ser diferente y depende de cómo actúa la fuerza: en dirección de la velocidad inicial o perpendicular a ella.

En el primer caso, la fuerza y la aceleración se denominan longitudinales (F_ℓ, a_ℓ) y en el segundo, transversales (F_t, a_t), siendo sus expresiones las que siguen:

$$\frac{m_0 a_\ell}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = F_\ell, \quad \frac{m_0 a_t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_t.$$

Así, para la masa también tienen lugar las siguientes relaciones:

$$\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m_\ell, \quad \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_t.$$

Ahora será analizada la relación entre la masa y la energía.

El trabajo elemental dA de la fuerza $\vec{F}$ realizado durante un desplazamiento $d\vec{r}$ es:

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Este trabajo debe producir un incremento de la energía cinética del cuerpo cuya masa es m:

$$dA = dE_c,$$

por tanto,

$$dE_c = dA = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\cdot d\vec{r} =$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} + \frac{m_0\vec{v}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\cdot d\vec{r} =$$

$$= \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

donde se utilizaron las relaciones siguientes:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v};\ \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot d\vec{v} = \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$\left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)(\vec{v}\cdot d\vec{r})=(\vec{v}\cdot d\vec{v})\left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=$$

$$=(\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{v}\cdot d\vec{v})=v^2(\vec{v}\cdot d\vec{v})$$

De esta manera,

$$dE_c=\frac{m_0\vec{v}\cdot d\vec{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Por otro lado, desde $m=m_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ se obtiene el diferencial total dm:

$$dm=\frac{m_0\vec{v}\cdot d\vec{v}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Al sustituir este diferencial total en la expresión para el diferencial de la energía cinética, se obtiene que

$$dE_c=c^2dm.$$

Es decir, la variación de la energía es proporcional a la masa, donde el coeficiente de proporcionalidad es c^2.

Lógicamente, este postulado puede generalizarse considerando que entre la *energía* y la *masa* (m) existe la siguiente *relación mutua*:

$$E=mc^2.$$

Al sustituir aquí la expresión para la masa observada, se tiene que

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\tag{1.64}$$

En el caso límite, cuando $v=0$, esto último se reduce a

$$E(v=0)\equiv E_0=m_0c^2\tag{1.65}$$

De esta manera, en relatividad tiene que ver con dos tipos de energía, a saber, la energía en reposo E_0 y la energía cinética E_c. Considerando luego que la energía total E es la suma de las dos anteriores, entonces

$$E=E_0+E_c,$$

y por tanto, desde (1.64) y (1.65) se encuentra la expresión relativista para la energía cinética

$$E_c = E - E_0 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \tag{1.66}$$

Desde la correlación entre la energía y la masa se puede deducir la fórmula que relaciona la energía con la cantidad de movimiento; desde (1.64) se tiene lo siguiente:

$$E^2 = \frac{m_0^2c^4}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Así que,

$$E^2 - \frac{v^2}{c^2}E^2 = m_0^2c^4 \tag{1.67}$$

Por otro lado, $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, de donde $p^2 = \frac{m_0^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$, pero $E^2 = \frac{m_0^2c^4}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$, es decir,

$$E^2 = \frac{p^2c^4}{v^2} \tag{1.68}$$

o lo que es lo mismo, $\frac{E^2v^2}{c^2} = p^2c^2$.

Al sustituir luego en (1.67) se sigue que

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2 \tag{1.69}$$

Aplicando la *correlación entre la energía y el momentum*, se puede encontrar la expresión para el momentum p_ϕ del fotón. Según la teoría de la relatividad, cuando la velocidad de una partícula tiende a la velocidad de la luz en el vacío, su energía tiende a infinito, siempre y cuando su masa en reposo sea diferente de cero.

Como la energía de los fotones que se mueven con velocidad c es finita, se infiere entonces que para estas partículas su masa en reposo es igual a cero. Esto mismo se infiere al colocar en (1.68) que $v = c$, pero también debe cumplirse (1.69), por lo que $m = 0$.

De esta manera, para el fotón $m_0 = 0$, y desde (1.69) se obtiene

$$p_\phi = \frac{E_\phi}{c} = \frac{hf}{c}$$

En definitiva, se tiene que el fotón se caracteriza por las dos magnitudes siguientes:

1. *La energía* $E_\phi = \varepsilon = hf$.
2. *El momentum* $p_\phi = \dfrac{hf}{c}$.

El hecho de que los fotones posean momentum se manifiesta directamente en la existencia de la presión luminosa.

Ejemplo 1.11.1

La masa observada de un protón ($m_{0p} = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) es 1.25 veces su masa en reposo. Encuentre:

a) La velocidad (en m/s) del protón respecto del observador.
b) La energía total de dicho protón (en joules).
c) La energía cinética de la partícula mencionada (en eV).

Solución:

a) Si se sustituyen valores en la expresión (1.57), se tiene:

$$\frac{5}{4}m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

de donde se sigue $v = \dfrac{3}{5}c = 1.8 \times 10^8$ (en m/s).

b) La energía total se obtiene desde (1.64),

$$E = \frac{m_{0p}c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{(1.67 \times 10^{-27})(3 \times 10^8)^2}{0.80}\,\mathrm{J} = 18.9 \times 10^{-11}\,\mathrm{J}$$

c) Al aplicar la expresión (1.66), se obtiene la energía cinética:

$$E_c = m_{0p}c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = 2.35 \times 10^8\,\mathrm{eV}$$

Ejercicio 1.11.1

Encuentre la energía cinética (en eV) de una partícula α ($m_{0\alpha} = 6.645 \times 10^{-27}$ kg) cuyas velocidades son: *a)* $0.1c$, y *b)* $0.6c$.

Solución:

a) 188×10^5 eV.
b) 9344×10^5 eV.

1.12. INTERVALOS

El espacio y el tiempo siempre participan como elementos insustituibles durante la descripción de los fenómenos físicos.

Por eso, la idea sobre su unificación en una variedad cuadrimensional única surgió hace bastante tiempo. Al respecto, J. A. D'Alambert escribió en 1764 un artículo titulado *Dimensionalidad*. Sin embargo, la descripción geométrica de esa variedad en los tiempos de D'Alambert parecía ser muy artificial, pues tenía como base física sólo la mecánica clásica y el principio de relatividad galileano. Señalando que respecto de las transformadas de Galileo son invariantes tanto la distancia entre dos puntos $R = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ como el intervalo de tiempo entre dos eventos, podría tomarse en calidad de *distancia* entre dos puntos espacio-temporales $(t_1, \vec{r}_1)$ y $(t_2, \vec{r}_2)$ alguna función positiva de R y T.

En particular, la elección de la *distancia* en la forma

$$S^{eucl} = \sqrt{R^2 + \alpha^2 T^2} \qquad (1.70)$$

donde α es alguna constante con dimensión de velocidad, que respondería a la variante euclidiana de la geometría del espacio-tiempo. El sentido físico de la constante α en este esquema queda oscuro, lo que confirma su artificialidad.

De manera completamente diferente se visualiza este problema si se considera el principio relativista de Einstein. Resulta que aun cuando las cantidades R y T cambian durante las transformaciones de Lorentz, de ellas se construye de manera única la siguiente forma cuadrática invariante:

$$S^2 = c^2T^2 - R^2 \equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 \qquad (1.71)$$

Apoyándose en este hecho, el conocido geómetra H. Minkowski construyó la nueva geometría del espacio-tiempo. Al participar en 1903 en una asamblea de naturistas y médicos en Kelna, propuso, en calidad de *distancia* entre dos puntos espacio-temporales, tomar la magnitud

$$S = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2},$$

la cual recibió el nombre de **intervalo**. Debido a que la forma fundamental (1.71) es de signo variable, la geometría de Minkowski se diferencia esencialmente de la geometría cuadrimensional euclidiana y para señalar esta diferencia a menudo se le llama *seudoeuclideana*.

Según la terminología de Minkowski, la variedad espacio-temporal, es decir, el conjunto de todos los valores posibles de x, y, z y t, se denomina **universo**, y un evento que sucede en la posición espacial x, y, z en el momento de tiempo t, se denomina *punto universo*. El conjunto de todos los puntos universo que representa el movimiento de un punto material por separado se llama *línea universo* de ese punto (fig. 1.15).

En la geometría de Minkowski, el intervalo S que relaciona dos eventos, es decir, dos puntos universo, en general puede ser una cantidad imaginaria o real en dependencia del signo de la forma cuadrática (1.71). En relación con esto, resaltan los siguientes intervalos cualitativamente diferentes:

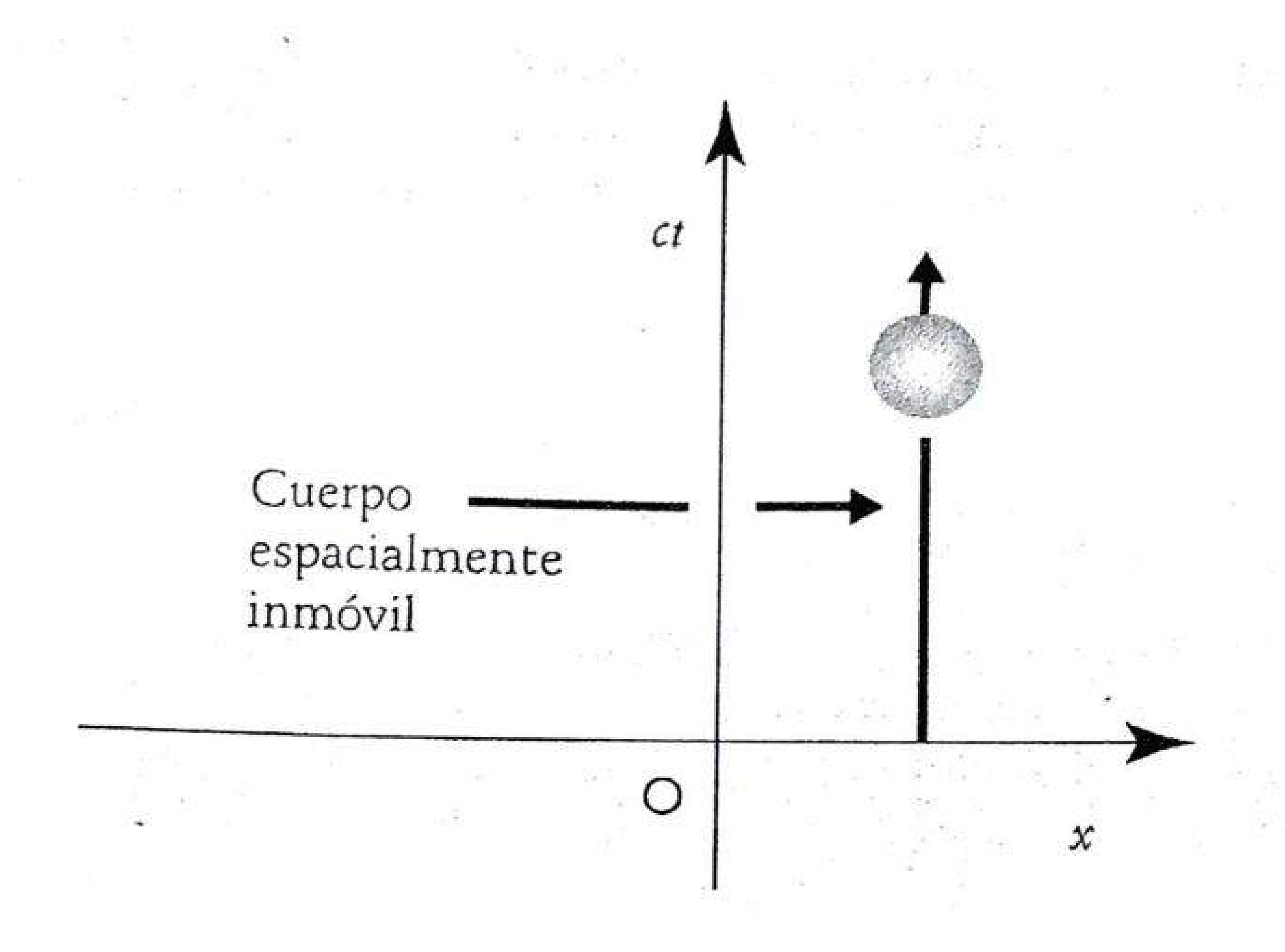


Figura 1.15. Espacio de Minkowski: un objeto en reposo es descrito por una trayectoria rectilínea.

1. *Temporal* ($S^2 > 0$).
2. *Espacial* ($S^2 < 0$).
3. *Luminoso* ($S^2 = 0$).

Estos nombres de intervalos se deben a la siguiente situación. A consecuencia de la invarianza del intervalo durante las transformadas de Lorentz, existe un sistema de referencia tal que cuando $S^2 > 0$ resulta que $R = 0$ y $S = cT$; esto es, la longitud del intervalo se mide con ayuda de relojes. Análogamente, cuando $S^2 < 0$, existe un sistema de referencia tal que $T = 0$, pero $R \neq 0$; es decir, la longitud del intervalo se mide con ayuda de reglas.

Los eventos separados por un intervalo espacial, obviamente no pueden estar unidos de manera causal. En realidad, si en cierto sistema de referencia $T = 0$ pero $R \neq 0$, la señal que une estos dos acontecimientos debe propagarse con una velocidad infinita, lo que resulta imposible.

Si los eventos están separados por un intervalo temporal, entonces pueden estar unidos causalmente. Esto permite introducir un orden en la sucesión de los mismos, el cual queda invariable en cualquier sistema de referencia, a pesar de que la simultaneidad es relativa.

1.13. LEY DE LA RELACIÓN MUTUA ENTRE LA MASA Y LA ENERGÍA

Enseguida será analizado un choque absolutamente no elástico; una de sus características, como es conocido, es que los cuerpos participantes se mueven juntos después de la colisión.

Limitándose al estudio de dos esferitas de igual masa se analizará primero el cuadro del choque según el punto de vista de la mecánica de Newton.

Sean dos esferitas de masa m las cuales se mueven con velocidades iguales en magnitud pero en sentidos opuestos, una al encuentro de la otra: $u_A = v$, $u_B = -v$. Entonces, luego del choque, ellas forman un cuerpo complejo C con masa m' cuya velocidad u_C es igual a cero (fig. 1.16).

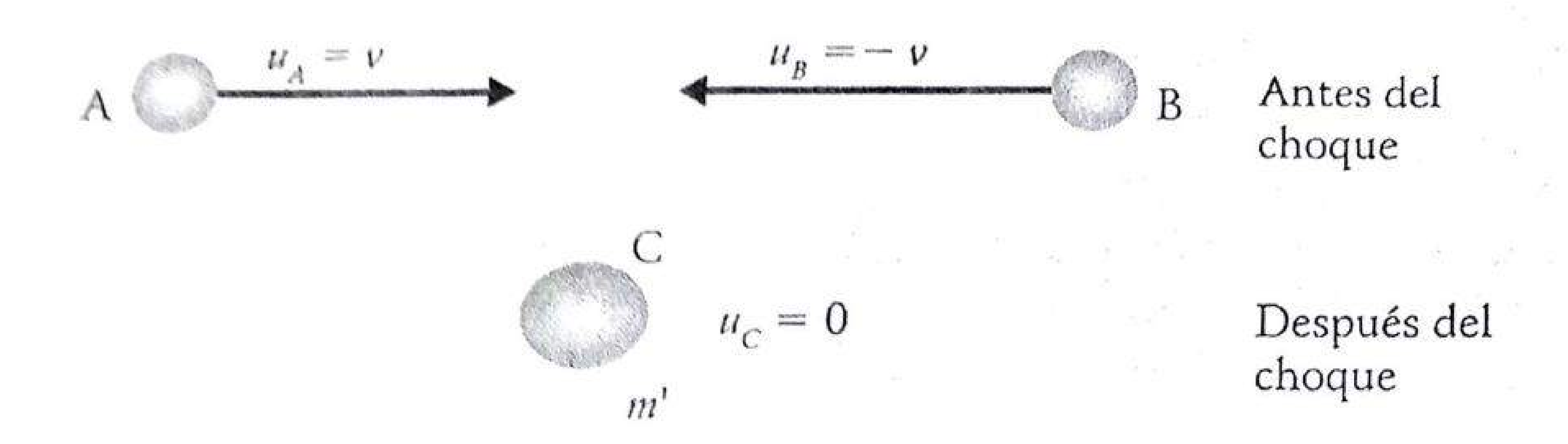


Figura 1.16. Choque absolutamente inelástico de dos esferitas de igual masa, que se mueven con velocidades de igual magnitud pero en sentidos opuestos, visto desde S.

No es difícil cerciorarse de que la ley de conservación del momentum se satisface en este sistema de referencia en forma automática: el momentum total antes del choque y después de éste es igual a cero: $m(v) + m(-v) = 0$; $m'(0) = 0$.

Obsérvese ahora este mismo choque desde el sistema de referencia S', el cual se mueve de izquierda a derecha con velocidad v (fig. 1.17).

Conforme al teorema clásico de la suma de velocidades,

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$$

En este sistema de referencia la esfera A antes del choque posee la velocidad $u'_A = v - v = 0$, la esfera B la velocidad $u'_B = -v - v = -2v$ y la esfera C la velocidad $u'_C = 0 - v = -v$.

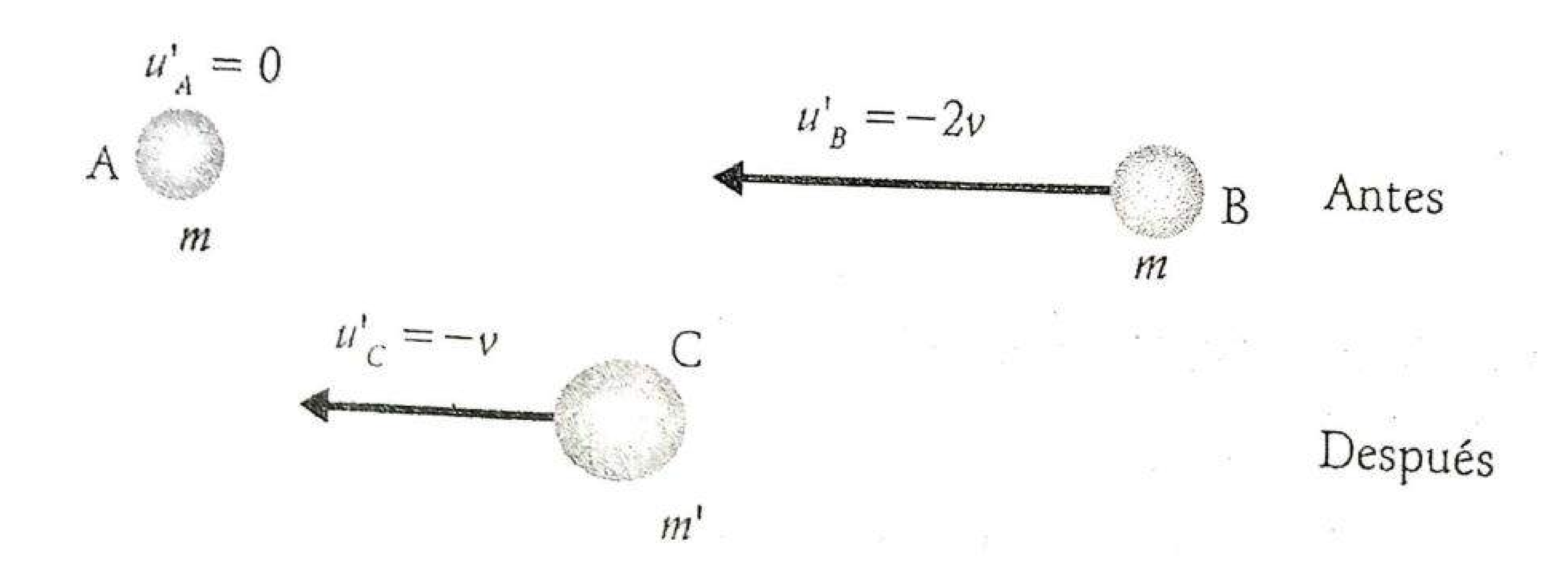


Figura 1.17. Choque absolutamente inelástico de dos esferitas de igual masa, que se mueven con velocidades de igual magnitud pero en sentidos opuestos, vistos desde S'.

La ley de conservación del momentum referida al sistema S', proporciona (recordando que en la mecánica clásica la masa es invariante) lo siguiente:

$$-m \cdot 2v = -m'v,$$

de donde se sigue que

$$m' = 2m$$

Esta igualdad representa la ley de conservación de la masa: la suma de las masas de las esferas A y B antes del choque es igual a la masa del cuerpo C después del choque.

Y así, en la mecánica clásica durante el choque inelástico de esferas tienen lugar dos leyes de conservación: la ley de conservación del momentum y la ley de conservación de la masa. Sin embargo, no es difícil observar que a diferencia de un choque elástico, la ley de conservación de la energía cinética en este caso no tiene lugar.

En realidad, en S antes del choque, las esferas poseen la energía cinética

$$2\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv^2,$$

y después del choque la energía cinética del cuerpo C es igual a cero; es decir, la energía cinética disminuyó en mv^2, lo mismo tiene lugar en el sistema S', ya que antes del choque la energía cinética es igual a

$$m\frac{(2v)^2}{2} = 2\ mv^2$$

El decremento de la energía cinética será igual a

$$2mv^2 - mv^2 = mv^2,$$

lo mismo que en S.

Desde un punto de vista más general, esto significa que en el choque inelástico analizado sucede la transformación de la energía del movimiento microscópico de las esferas en energía térmica del movimiento $mv^2 = Q$. La energía total en un sistema aislado compuesto de las esferas A y B, se conserva incluso durante un choque inelástico. Sin embargo, en los marcos de la física clásica esta ley general de conservación de la energía no puede ser expresada en términos mecánicos (masas, velocidades, etc.), ya que todas las demás formas de energía, a excepción de la mecánica (interna, electromagnética, nuclear, etc.), se expresan mediante sus parámetros específicos (temperatura, calor específico, intensidad de los campos, etc.).

Ahora, este problema será analizado desde el punto de vista de la mecánica relativista.

Represéntese mediante m_0 la masa en reposo de las esferas A y B, y mediante m'_0 la masa en reposo de C, el cual surge como resultado de la *unión* de las esferas. Al igual que en el caso no relativista, la ley de conservación del momentum en el sistema S, en el que A y B se mueven al encuentro una con otra con iguales velocidades ($u_A = v$, $u_B = -v$), y el cuerpo C después del choque, está en reposo ($u_C = 0$), se cumple automáticamente.

Obsérvese ahora, desde el sistema S', el cual se mueve hacia la derecha con velocidad v. Con base en el teorema relativista sobre la suma de velocidades

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} - \vec{v}}{1 - \frac{uv}{c^2}},$$

en S' las velocidades de los cuerpos serán iguales a

$$u'_A = \frac{v - v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0;$$

$$u'_B = \frac{-v - v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}};$$

$$u'_C = \frac{0 - v}{1 - 0\frac{v}{c^2}} = -v$$

La ley de conservación del momentum relativista $p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ en S' conlleva a

$$\frac{-m_0 \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{4\frac{v^2}{c^2}}{c^2\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2}}} = \frac{-m'_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Y así, se observa que la ley de conservación de la masa en reposo no tiene lugar durante el choque inelástico (lo cual era de esperar). Sin embargo, la última igualdad muestra que la ley de conservación de la masa relativista, que depende de la velocidad, sigue siendo válida. En realidad, la expresión $2m_0/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ es la masa total de las esferas A y B, las cuales se mueven en S con velocidad v, y m_0 es la masa del cuerpo C, el cual está en reposo en S, y por consiguiente, la última igualdad puede ser escrita de la forma

$$m_C = m_A + m_B$$

No es difícil cerciorarse de que la ley de conservación de la energía cinética no se cumple durante el choque inelástico, aun en el caso relativista.

En realidad, en S antes del choque la energía cinética total de las esferas A y B es igual a

$$2E_c(v) = 2m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$$

mientras que después del choque, la energía cinética del cuerpo C es igual a cero.

Por consiguiente, durante el choque las energías cinéticas de las esferas se transforman en energía interna (no es difícil cerciorarse de que tal resultado se tiene también en S'). La última igualdad conlleva a la siguiente consecuencia importante. Restando de ambas partes $2m_0$, se obtiene

$$m_0' - 2m_0 = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right),$$

o bien,

$$m_0' - 2m = 2\frac{E_c(v)}{c^2} \qquad (1.72)$$

Y así, se observa que durante el choque inelástico sucede el aumento de la reserva de la energía interna (la energía total menos la energía del movimiento microscópico del cuerpo como un todo) en una cantidad $2E_c$, y esto se acompaña del aumento de la masa de reposo en $\frac{2E_c}{c^2}$.

Ello conduce a la conclusión de que la masa en reposo es una medida de la **energía interna** del cuerpo. Precisamente, la reserva de energía interna del cuerpo es proporcional a la masa en reposo de este cuerpo con el coeficiente de proporcionalidad c^2.

$$E_{int} = m_0c^2$$

Este resultado obtenido permite la siguiente generalización.

La energía total del cuerpo se compone evidentemente de su energía interna y de la energía cinética del mismo como un todo:

$$E = E_{int} + E_c(v) = m_0c^2 + E_c(v),$$

la igualdad (1.72) que puede ser escrita de la forma

$$m_0'c^2 = 2[m_0c^2 + T(v)],$$

o como

$$m_0'c^2 + T(0) = 2[m_0^2c^2 + T(v)]; \quad T(0) \equiv 0,$$

representa la ley de la conservación de la energía total:

$$E = m_0c^2 + E_c(v)$$

La expresión de la energía total E puede ser luego transformada de la manera siguiente:

$$E = m_0c^2 + E_c(v)$$
$$= m_0c^2 + m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

APÉNDICE A. DEDUCCIÓN DE LAS TRANSFORMADAS DE LORENTZ-EINSTEIN

Si se asume lo mencionado en la sección 1.8. "Transformadas de Lorentz", deben existir fórmulas de transformación de un sistema de referencia a otro, las cuales serán escritas primero en su forma más general:

$$t' = \varphi(t, \vec{r}); \quad r' = f(t, \vec{r}) \tag{1.73}$$

donde φ y f son funciones incógnitas. Para determinar su forma explícita serán utilizadas las cuatro suposiciones formuladas correspondientemente en la sección 1.8.

1. Sean $(t_1, \vec{r}_1)$ y $(t_2, \vec{r}_2)$ dos eventos en S y $(t_1', \vec{r}_1')$, $(t_2', \vec{r}_2')$ las posiciones de los mismos en S'.[7] Entonces las diferencias $t_2' - t_1'$ y $\vec{r}_2' - \vec{r}_1'$ pueden depender sólo de $t_2 - t_1$ y $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, como así lo exige el principio de homogeneidad del espacio-tiempo.
   De esta manera,

$$\varphi(t_2, \vec{r}_2) - \varphi(t_1, \vec{r}_1) = \Phi(t_2 - t_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{1.74}$$
$$f(t_2, \vec{r}_2) - f(t_1, \vec{r}_1) = F(t_2 - t_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

   donde Φ y F son nuevas funciones. Si se acepta que en el momento $t = 0$ los orígenes de los sistemas S y S' coinciden, se tiene que $\varphi(0, 0) = 0$, $f(0, 0) = 0$. Por eso, colocando en (1.74) $t_1 = 0$ y $\vec{r}_1 = 0$ (será más correcto escribir $|\vec{r}| = 0$) se obtiene que:

$$\varphi(t_2, \vec{r}_2) = \Phi(t_2, \vec{r}_2) \tag{1.75}$$
$$f(t_2, \vec{r}_2) = F(t_2, \vec{r}_2)$$

[7] Posteriormente, hay que señalar que un punto en cualquier SIR representa un evento.

Entonces, las ecuaciones (1.74) adquieren la forma

$$\varphi(t_2, \vec{r}_2) - \varphi(t_1, \vec{r}_1) = \varphi(t_2 - t_1, r_2 - r_1) \qquad (1.76)$$
$$f(t_2, \vec{r}_2) - f(t_1, \vec{r}_1) = f(t_2 - t_1, r_2 - r_1)$$

de las cuales se sigue que φ y f son lineales respecto de t y $\vec{r}$.

2. Como en 1, considérese que los ejes de coordenadas en S y S' son paralelos y coincidentes en el momento de tiempo $t = 0$. Entonces, como consecuencia de la isotropía del espacio, existe una dirección destacada que corresponde a la dirección de la velocidad $\vec{v}$. Dicho de otro modo, el único vector del cual pueden depender paramétricamente las funciones de transformación φ y f en (1.73) es la velocidad $\vec{v}$. Orientando el eje x en la dirección de este vector y considerando además la linealidad de las funciones φ y f, la coincidencia de los planos $x' = 0$ y $x = vt$ y el paralelismo de los ejes de coordenadas de S y S', se infiere la proporcionalidad de x', y', z y de $x - vt$, y, z correspondientemente. Además, los coeficientes de proporcionalidad en las direcciones y y z son iguales, debido a que en las mismas no se realiza movimiento alguno.
   Al fin, t' puede depender sólo de t y de x, pues la dirección x es la privilegiada. Si se considera lo anterior, la transformación (1.73) puede escribirse de la forma

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad (1.77)$$
$$y' = \alpha y$$
$$z' = \alpha z$$
$$t' = \mu\left(t - \frac{vx}{\eta}\right)$$

donde los coeficientes α, γ, μ y η pueden depender sólo de $\vec{v}^2$, ya que durante el cambio de dirección de los ejes x y x' por la inversa y con el cambio simultáneo del signo de la velocidad $\vec{v}$, los coeficientes de la transformación (1.77) no deben cambiar, como así se infiere desde la isotropía del espacio.

3. Utilizando el principio de la relatividad será analizado el proceso inverso; es decir, las observaciones deberán realizarse ahora desde S'. A consecuencia de la igualdad de los sistemas de referencia S y S', este proceso será descrito por las mismas fórmulas (1.77), a condición de cambiar el signo de la velocidad: $v \to -v$, primar las coordenadas no primadas y viceversa (fig. 1.18):

$$x = \gamma(x' - vt') \qquad (1.78)$$
$$y = \alpha y'$$
$$z = \alpha z'$$
$$t = \mu\left(t' + \frac{vx'}{\eta}\right)$$

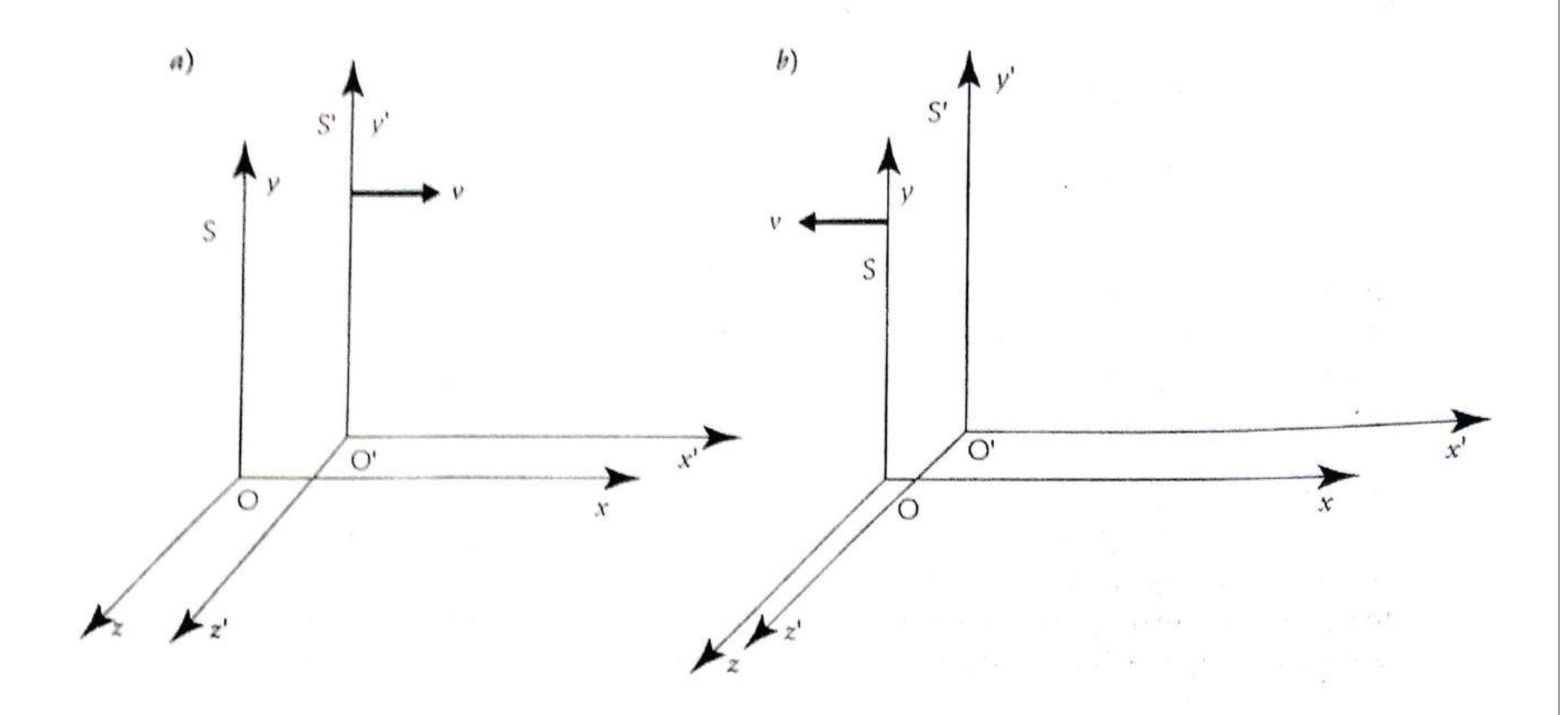


Figura 1.18. Movimiento relativo entre dos SIR observado desde: *a)* S, *b)* S'.

Al sustituir (1.77) en (1.78) se tiene que:

$$x = \gamma\left[\gamma(x - vt) + v\mu t - \mu\frac{xv^2}{\eta}\right]; \quad y = \alpha y \tag{1.79}$$

$$z = \alpha z; \quad t = \mu^2 t - \mu^2\frac{vx}{\eta} + \mu v\gamma\frac{x - vt}{\eta}$$

Dado que las relaciones obtenidas deben cumplirse idénticamente, las funciones α, γ, μ, η resultan estar relacionadas entre sí:

$$\alpha^2 = 1; \quad \gamma\left(\gamma - \frac{\mu v^2}{\eta}\right) = 1; \quad \gamma v(\mu - \gamma) = 0 \tag{1.80}$$

$$\mu^2 - \frac{\mu\gamma v}{\eta} = 1; \quad v\mu\frac{(\mu - \alpha)}{\eta} = 0$$

Desde éstas se encuentra que $\alpha = \pm 1$. Sin embargo, el caso $\alpha = -1$ corresponde a la transformación $y' = -y$, $z' = -z$, lo cual no corresponde a la suposición hecha al principio de que los ejes de coordenadas de S y S' coinciden. Así pues, la única solución correcta para α es

$$\alpha = 1 \tag{1.81}$$

Luego, puesto que $v \neq 0$ y $\gamma \neq 0$ (de otra manera $x' \neq 0$), se obtiene que

$$\mu = \gamma, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{\eta}} \tag{1.82}$$

lo cual, al ser considerado en (1.78), las transformadas adquieren la forma siguiente:

$$x' = \gamma(x - vt), \; y' = y, \; z' = z, \tag{1.83}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{\eta}\right) \quad \gamma^2 = \left(1 - \frac{v^2}{\eta}\right)$$

Y así, sólo resta encontrar la función incógnita $\eta(v^2)$. Con este fin será utilizado de nuevo el principio de la relatividad al analizarse el movimiento de un tercer SIR S'', el cual posee la velocidad v' respecto del SIR S'. Según este principio, las transformadas de S a S'' son de la misma forma que (1.83), con alguna nueva velocidad $\bar{v}$ y nuevas magnitudes, $\bar{\gamma} = \gamma(\bar{v}^2)$, $\bar{\eta} = \eta(\bar{v}^2)$:

$$x'' = \bar{\gamma}(x - \bar{v}t), \quad y'' = y, \quad z'' = z, \quad t'' = \bar{\gamma}\left(t - \frac{\bar{v}x}{\bar{\eta}}\right) \tag{1.84}$$

Sin embargo, la misma transformación puede obtenerse al efectuar primero el paso S $\rightarrow$ S' y luego de S' $\rightarrow$ S''. Esta posibilidad refleja el carácter grupacional de las transformadas buscadas. De esta manera,

$$x'' = \gamma\gamma'\left[x - vt - v'\left(t - \frac{vx}{\eta}\right)\right] \tag{1.85}$$

$$t'' = \gamma\gamma'\left(t - \frac{vx}{\eta} - \frac{v'}{\eta'}(x - vt)\right)$$

Al comparar (1.84) y (1.85) y en particular los coeficientes de x en la expresión para x'' y los coeficientes para t en la expresión para t'', se encuentra lo siguiente:

$$\bar{\gamma} = \gamma\gamma'\left(1 - \frac{vv'}{\eta}\right), \quad \bar{\gamma} = \gamma\gamma'\left(1 - \frac{vv'}{\eta'}\right),$$

de lo cual, al comparar término a término, se sigue que

$$\eta' = \eta = \text{const.} \tag{1.86}$$

es decir, η no depende de v. Así, según (1.81) y (1.86), γ es función de v^2 y de la constante fundamental η:

$$\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta}}}$$

Sin embargo, la solución correspondiente a γ negativo debe ignorarse, ya que cuando $v = 0$, se sigue la transformación idéntica, es decir, $\gamma(0) = 1$. Finalmente,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta}}}$$

4. Para determinar la constante η será utilizado el postulado de constancia de la velocidad de la luz en el vacío.
   Sea que una onda luminosa plana se propaga por el eje x. La ecuación de su frente de onda en el sistema S tiene la forma

$$x - ct = 0 \tag{1.87}$$

De acuerdo con el postulado mencionado, la ecuación correspondiente en el sistema S' debe tener la misma forma:

$$x' - ct' = 0 \tag{1.88}$$

Si se transforma la parte izquierda de esta ecuación al sustituir en ella las relaciones (1.84) y si se considera además (1.87), se tendrá

$$\gamma vt\left(1 - \frac{c^2}{\eta}\right) = 0$$

Ya que $v \neq 0$ y $\gamma \neq 0$, se tiene lo siguiente:

$$\eta = c^2 \tag{1.89}$$

Finalmente, las transformadas de Lorentz deducidas desde los postulados de Einstein toman la siguiente forma:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.90}$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Las transformadas inversas se obtienen con el cambio $v \to -v$ y además, cambiando las coordenadas primadas por las no primadas y a la inversa:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (1.91)$$

$$y = y', \quad z = z',$$

$$t = \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Y así, ha sido obtenido el sistema de transformadas para las coordenadas espaciales y temporal, las cuales permiten describir un sistema desde SIR diferentes al propio. En dichas transformadas están contenidas las nuevas concepciones sobre el espacio y el tiempo, emanadas desde el principio de la relatividad extendido a todos los fenómenos físicos, incluyendo los electrodinámicos.

APÉNDICE B. OTRA FORMA DE OBTENER $m = m(v)$

Es bien conocido que bajo la acción de una fuerza constante los cuerpos se mueven uniformemente acelerados; es decir, obtienen aceleración constante.

De esta manera, la relación entre la fuerza y la aceleración durante el movimiento queda invariable. Por consiguiente, la inercia de un cuerpo y la masa como medida de la inercia, son magnitudes constantes que no dependen de la velocidad del cuerpo en movimiento.

Sin embargo, toda esta regularidad sobre la cual se basa todo el edificio de la mecánica clásica resulta justa sólo para velocidades muy pequeñas de los movimientos. Esto se indica con toda razón por la experiencia de la técnica moderna para acelerar partículas cargadas del micromundo tales como los electrones, los protones, etcétera.

Sea analizado, por ejemplo, el proceso de aceleración de protones por un campo eléctrico constante en un acelerador lineal en el que las partículas aceleradas se mueven rectilíneamente [29].

De acuerdo con las leyes de la mecánica clásica, la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$ necesaria para la aceleración está determinada por la fórmula:

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E},$$

donde e es la carga del protón y, además, fue considerado que la masa del mismo no cambia durante el movimiento.

Para comunicar a los protones la aceleración alcanzada por las partículas pesadas en los aceleradores lineales, la cual es del orden de $\sim 10^{18}$ cm/s^2 se requiere un campo con intensidad:

$$E = \frac{m}{e}\frac{du}{dt} = (300\ \text{V/cm})\frac{1.67\times10^{-24}\times10^{18}}{4.8\times10^{-10}} = 1.04\times10^{6}\,\text{V/cm}$$

independientemente de cuál haya sido la velocidad inicial del protón.

Empero, la experiencia de la física de los aceleradores muestra con toda evidencia que esto no es así: la intensidad necesaria del campo depende de cuál es la velocidad obtenida por el protón. En la siguiente gráfica se ilustran las velocidades iniciales y las correspondientes intensidades necesarias para acelerar el protón hasta magnitudes del orden de 10^{10} cm/s^2 (véase fig. 1.19).

Obsérvese que la curva es recta sólo mientras $u << c$. Posteriormente, mien-

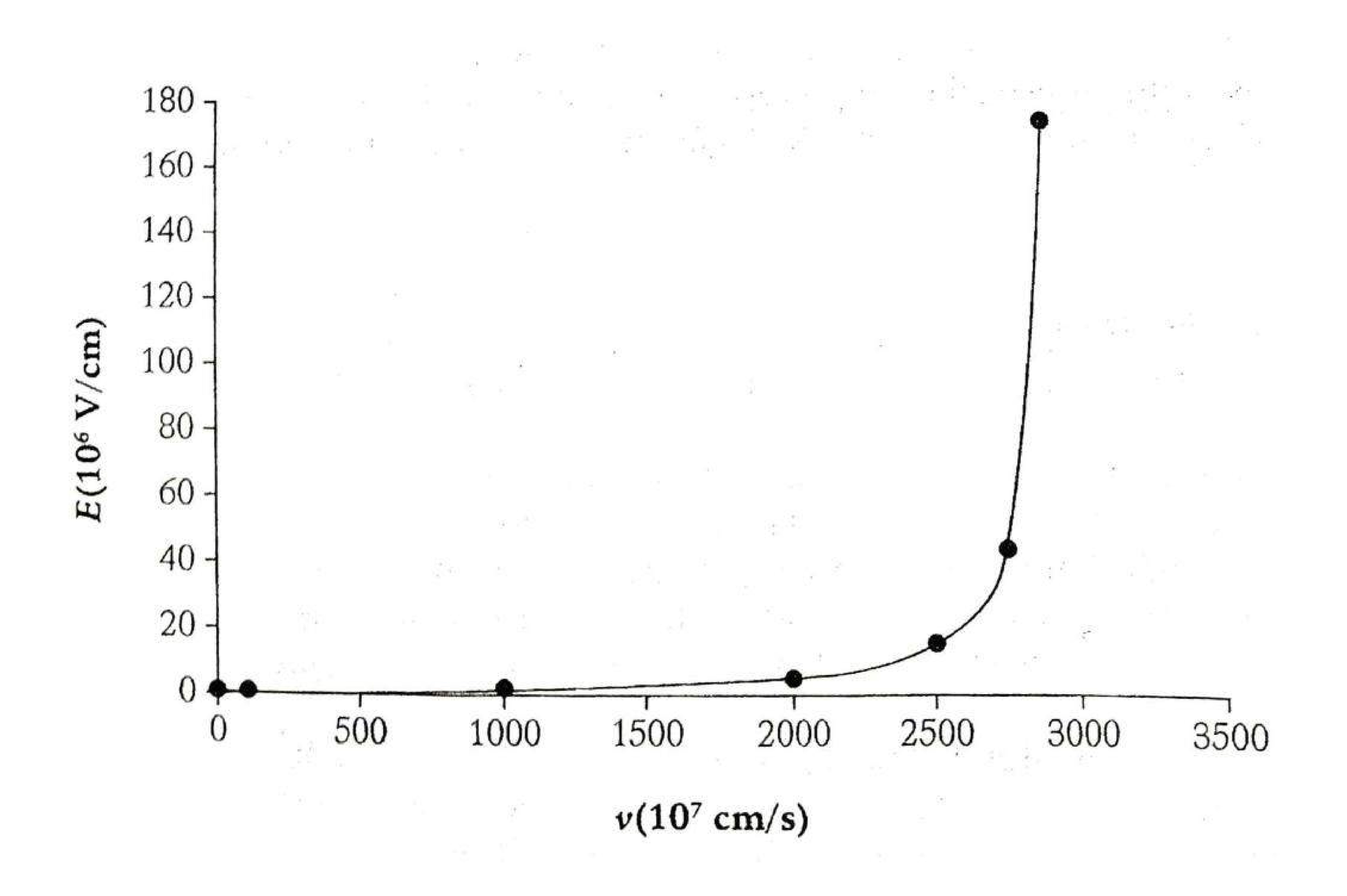


Figura 1.19. Valores del campo eléctrico E necesarios para que el protón adquiera una aceleración de 10^{18} cm/s^2, cuando dicha partícula tiene diferentes velocidades iniciales; por ende, $m = m(v)$.

tras mayor sea la velocidad alcanzada por el protón, será más intenso el campo que hay que aplicar para su posterior aceleración. Pero esto a su vez indica que con el aumento de la velocidad del cuerpo crece su inercia y, por tanto, aumenta su masa medida.

Y así, el experimento indica que a grandes velocidades la masa del cuerpo debe depender de la magnitud absoluta de su velocidad:

$$m = m(u); \quad u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

La forma de esta dependencia funcional puede ser establecida unívocamente, si se aplica la ley de conservación del momentum y el teorema relativista sobre la suma de velocidades.

Obsérvese con este fin el siguiente experimento imaginario, indicado primeramente por Lewis y Tolman en 1909. Sea un choque elástico entre dos esferas iguales A y B y considérese que las velocidades de las esferas antes del choque son iguales en magnitud pero de sentidos opuestos en el sistema S.

Si se denota la proyección de la velocidad de la esfera A en los ejes Ox y Oy mediante a y b correspondientemente, entonces las correspondientes proyecciones de la velocidad de la esfera B serán $-a$ y $-b$.

Supóngase además que como resultado del choque las proyecciones en x de las velocidades de ambas esferas quedan invariables y las proyecciones en y cambian de signo; esto es, las esferas se expelen en las direcciones mostradas en el dibujo con flechas punteadas (fig. 1.20).

Entonces, en el sistema S se tiene la tabla 1.1 para las velocidades de las esferas A y B antes y después del choque.

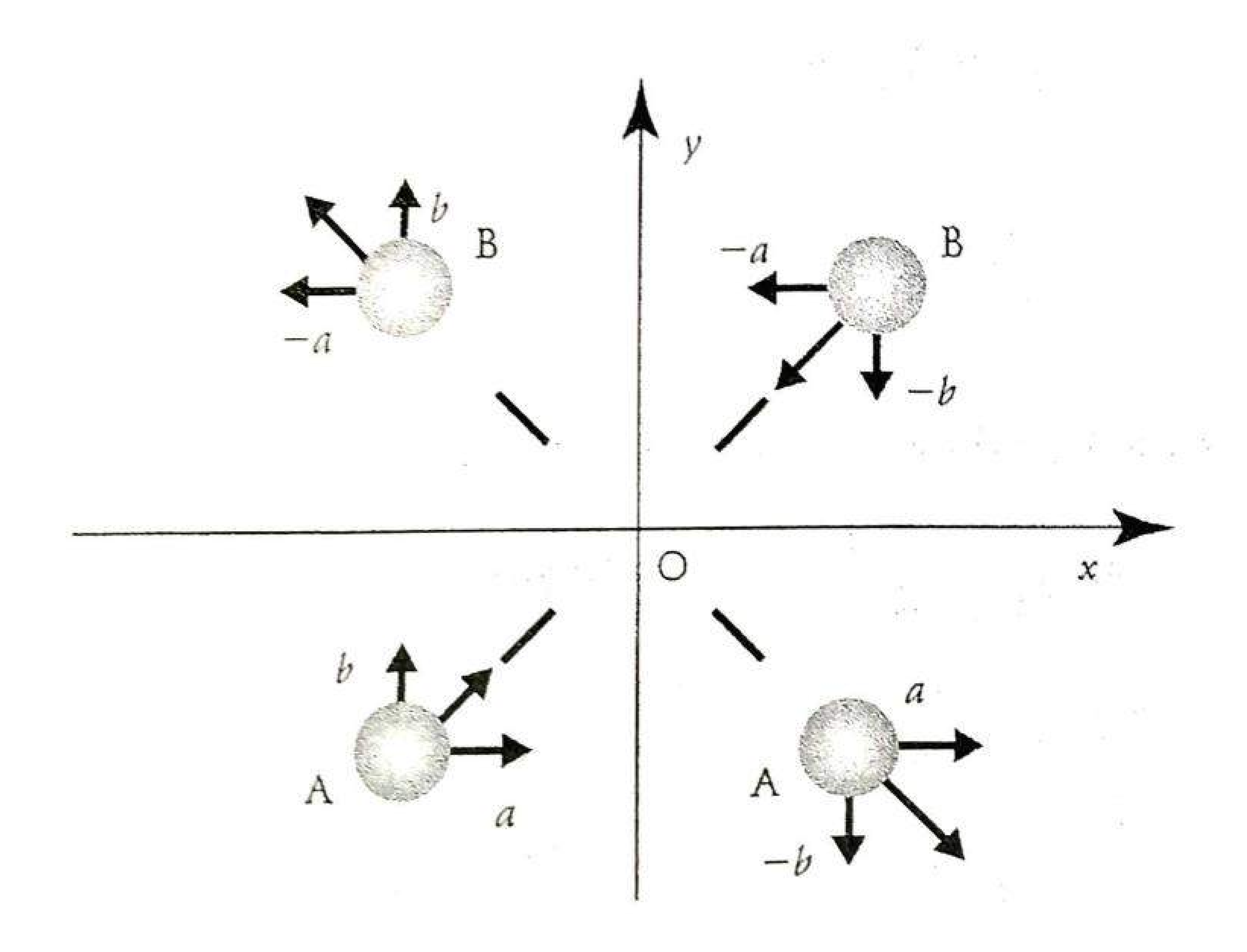


Figura 1.20. Choque elástico entre dos esferas de igual masa m y velocidades iguales en magnitud pero de sentidos opuestos en y (SIR S).

Tabla 1.1. Velocidades en S.

	Antes		*Después*	
	u_x	u_y	u_x	u_y
Esfera A	a	b	a	$-b$
Esfera B	$-a$	$-b$	$-a$	b

En este sistema, el momentum total antes y después del choque es igual a cero. En realidad, las proyecciones de los ejes Ox y Oy del vector $m(u_A)\vec{u}_A + m(u_B)\vec{u}_B$ antes y después del choque son iguales:

$$m\left[\sqrt{a^2+b^2}\right]\cdot a + m\left[\sqrt{a^2+b^2}\right]\cdot(-a) = 0$$

$$m\left[\sqrt{a^2+b^2}\right]\cdot b + m\left[\sqrt{a^2+b^2}\right]\cdot(-b) = 0$$

Obsérvese ahora al sistema de referencia S', el cual se mueve respecto de S con una velocidad a, y encuéntrese las velocidades de las esferas A y B antes y después del choque en S'. Aplicando el teorema relativista de la suma de las velocidades, se tiene que

$$u'_x = \frac{u_x - a}{1 - u_x \dfrac{a}{c^2}} \tag{1.92}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{1 - u_x \dfrac{a}{c^2}}\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}$$

l colocar ahora los valores de u_x y de u_y antes y después del choque en esta fórula, se obtiene la tabla de valores siguiente (tabla 1.2):

Tabla 1.2. Velocidades en S'.

	Antes		*Después*	
	u'_x	u'_y	u'_x	u'_y
Esfera A	0	$\dfrac{b}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{c^2}}}$	0	$\dfrac{-b}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{c^2}}}$
Esfera B	$\dfrac{-2a}{1+\dfrac{a^2}{c^2}}$	$\dfrac{-b\sqrt{1-\dfrac{a^2}{c^2}}}{1+\dfrac{a^2}{c^2}}$	$\dfrac{-2a}{1+\dfrac{a^2}{c^2}}$	$\dfrac{b\sqrt{1-\dfrac{a^2}{c^2}}}{1+\dfrac{a^2}{c^2}}$

Como se observa desde la misma tabla, en S' la esfera A antes y después del choque se mueve a lo largo del eje Oy' y el cuadro del choque corresponde a la figura 1.21.

Ahora será analizada la ley de conservación del momentum en S'. Debido a que la magnitud absoluta de la velocidad es igual a:

$$\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} = u'_A \qquad \text{para la esfera A}$$

$$\frac{4a^2 + b^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)}{1+\frac{a^2}{c^2}} = u'_B \qquad \text{para la esfera B}$$

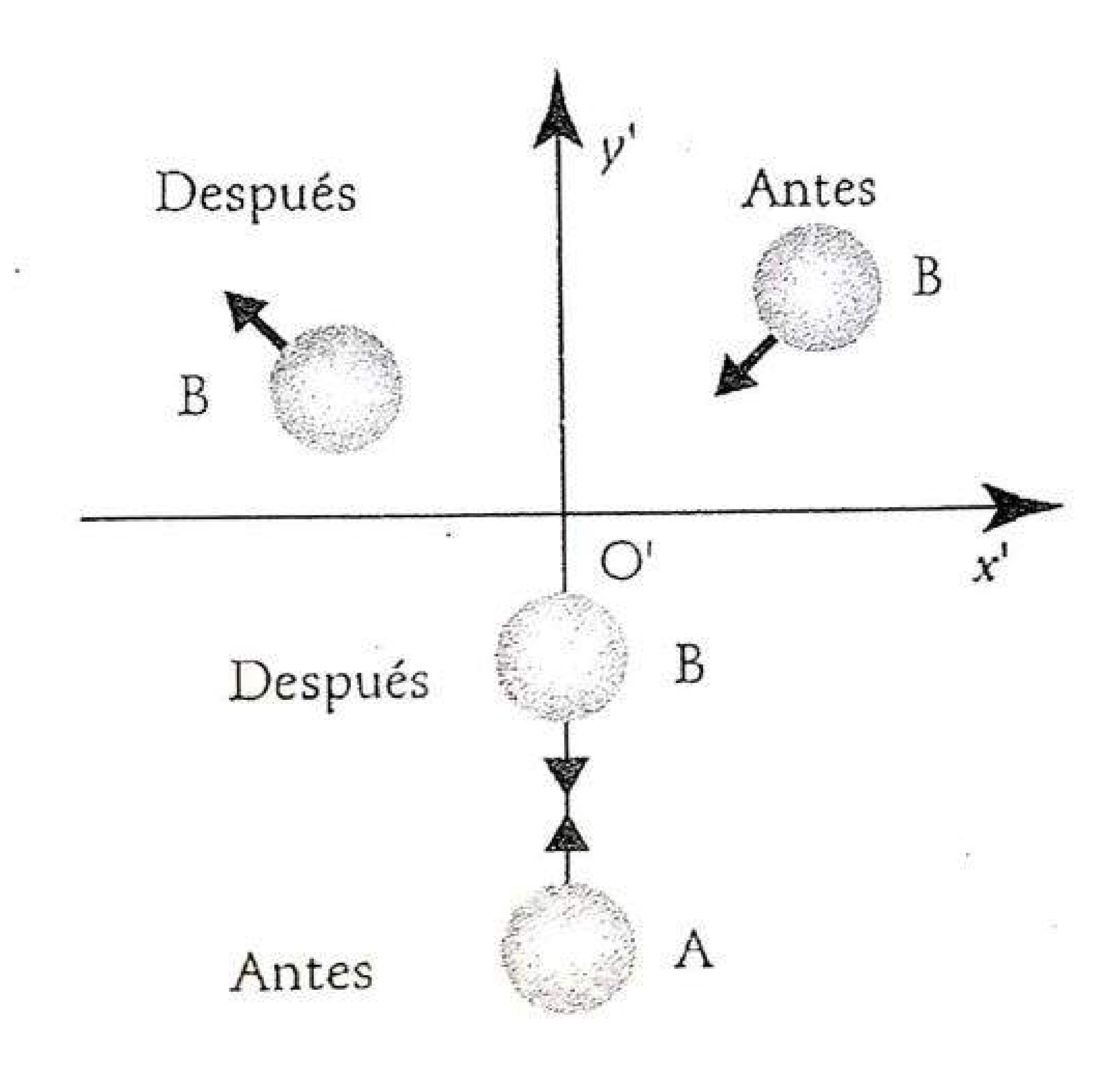


Figura 1.21. Choque elástico entre dos esferas de iguales masas m y velocidades iguales en magnitud, visto desde S'.

Entonces, la ley de conservación para las proyecciones del momentum en el eje Ox' proporciona la siguiente ecuación:

$$\frac{m(u'_A)b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} + m(u'_b)\frac{-b\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}} = 0,$$

$$\frac{m(u'_A)b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}} = m(u'_b)\frac{b\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}},$$

de donde se sigue que

$$m(u'_B) = m(u'_A)\frac{1+\dfrac{a^2}{c^2}}{1-\dfrac{a^2}{c^2}} \tag{1.93}$$

Esta igualdad debe conservarse idénticamente para cualesquiera valores de b y a. Luego de colocarse en particular que $b = 0$, se obtiene

$$u'_A = 0, \quad u'_B = \frac{2a}{1+\dfrac{a^2}{c^2}}$$

y entonces,

$$m\frac{2a}{1+\dfrac{a^2}{c^2}} = m_0\frac{1+\dfrac{a^2}{c^2}}{1-\dfrac{a^2}{c^2}} \tag{1.94}$$

donde $m_0 \equiv m(0)$ es una magnitud constante la cual es natural denominar **masa en reposo**.

Para obtener la dependencia funcional final $m(u)$, serán realizadas las siguientes transformaciones y notaciones:

$$\frac{2a}{1+\dfrac{a^2}{c^2}} = u$$

$$\frac{2a}{c}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)^{-1} = \frac{u}{c}$$

$$1-\frac{2a}{c}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right) = 1-\frac{u}{c}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}-\frac{2a}{c}\right)\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right) = 1-\frac{u}{c}$$

$$\frac{\left(1-\dfrac{a}{c}\right)^2}{\left(1+\dfrac{a^2}{c^2}\right)} = 1-\frac{u}{c}$$

$$\frac{2a}{1+\dfrac{a^2}{c^2}} = u$$

$$\frac{2a}{c}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)^{-1} = \frac{u}{c}$$

$$1+\frac{2a}{c}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right) = 1+\frac{u}{c}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}+\frac{2a}{c}\right)\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)^{-1} = 1+\frac{u}{c}$$

$$\frac{\left(1+\dfrac{a}{c}\right)^2}{\left(1+\dfrac{a^2}{c^2}\right)} = 1+\frac{u}{c}$$

Al multiplicar miembro a miembro los resultados obtenidos, se tiene que

$$\frac{\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Sustituyendo luego esto último en la igualdad (1.93) se llega finalmente a la forma de la dependencia funcional de la masa respecto de la velocidad:

$$m(u)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{1.95}$$

APÉNDICE C. RELACIONES ÚTILES PARA LA FORMA VECTORIAL DE LA SUMA RELATIVISTA DE LAS VELOCIDADES

Si se consideran las expresiones (1.47)-(1.49), tienen lugar las siguientes transformaciones simples:

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

$$=\left(1+\frac{v}{c^2}u'_x\right)^{-2}\left[u'^2_x+v^2+2vu'_x+u'^2_y+u'^2_z-\frac{v^2}{c^2}\left(u'^2_y+u'^2_z\right)\right]$$

$$=\left(1+\frac{v}{c^2}u'_x\right)^{-2}\left[u'^2+v^2+2vu'\cos\alpha'-\left(vu'\operatorname{sen}\alpha'\right)^2/c^2\right]$$

pero

$$u'^2_y + u'^2_z = u'^2 - u'^2_x = u'^2\ (1-\cos^2\alpha') = (u'\ \operatorname{sen}\alpha')^2$$

$$1+v\frac{u'_x}{c^2}=1+\frac{vu'}{c^2}\cos\alpha'$$

Así pues,

$$u=\frac{u'^2+v^2+2vu'\cos\alpha'-\frac{(vu'\operatorname{sen}\alpha')^2}{c^2}}{1+\frac{vu'}{c^2}\cos\alpha}$$

$$u_x = u\cos\alpha, \qquad u_y = u\ \operatorname{sen}\alpha$$

PROBLEMAS

1. Una lancha a motor que se desplaza río arriba con velocidad $\vec{v}$ = const. respecto del agua del río, rebasó a una balsa en el punto A. Luego de un tiempo t = 60 min, regresó río arriba y encontró la balsa en un punto B situado a 6.0 km del punto A aguas abajo. Encontrar la velocidad de la corriente, considerando que el motor de la lancha funcionó a un mismo ritmo durante todo el trayecto.

- **Guía.** Una ilustración lineal de esta situación es la siguiente: AB = 60 km, t = 60 min (fig. 1.22).

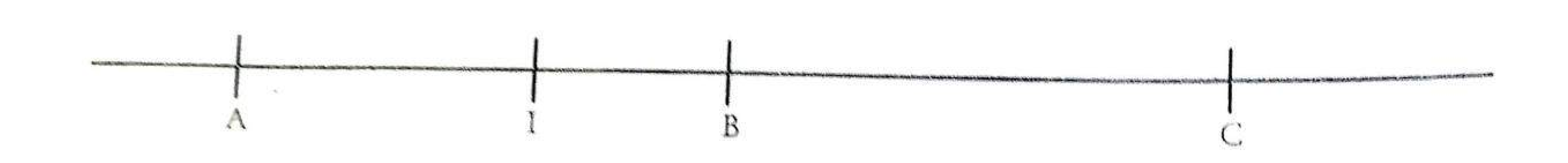


Figura 1.22

- **Descripción.** La balsa alcanza el punto I cuando la lancha retorna en el punto C, ambas se encuentran en el punto B.
- **Movimiento de la balsa.** $t = \frac{IA}{u}$, $t' = \frac{IB}{u}$, donde u es la velocidad del agua (y por tanto de la balsa) respecto de la orilla, t' es el tiempo que hace la balsa desde el punto I hasta B. Por eso, $t + t' = \frac{AB}{u}$ y entonces $t' = \frac{AB}{u} - t$ (c).
- **Movimiento de la lancha.** $AC = (u + v)t$ (a) y $CB = (v - u)t'$ (b). Por otro lado, BC = AC – AB. Sustituyendo en esto último (a), (b), (c), se obtiene $u = \frac{Ab}{2t} = 0.83$ m/s.

2. En un río de anchura D y que fluye con velocidad $\vec{v}$ = const. dos botes A y B parten de un mismo punto situado a una orilla del río, con la misma velocidad, de modo que $|\vec{u}_A| = |\vec{u}_B| = |\vec{u}|$ = const. El bote A cruza el río hasta llegar a un punto en la otra orilla ubicado en la línea que pasa por el punto de partida y que es perpendicular a la dirección de la corriente; y luego regresa al punto de partida. Mientras tanto, el bote B recorre aguas abajo la distancia D para luego regresar al punto de partida. Calcular la razón de los tiempos empleados en cada recorrido completo.

- **Guía.** Sea t' el tiempo que hace A en cruzar en una dirección el río. Entonces $u_y t' = ut'$ $= \cos\alpha = D$, sen $\alpha = \frac{v}{u}$. Por tanto, $t' = \left(\frac{D}{v}\right)\tan\alpha$ y $t_A = \left(\frac{2D}{v}\right)\tan\alpha$, $\tan\alpha = \frac{v}{\sqrt{u^2 - v^2}}$.

Sea τ' el tiempo que hace B en dirección de la corriente y τ'' el tiempo de regreso al punto de partida. Entonces, $(u + v)\tau' = D$, $(u - v)\tau'' = D$. De esta manera, $t_B = \tau' + \tau''$ $= \frac{2uD}{u^2 - v^2}$. Así, $\frac{t_A}{t_B} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}$. (Fig. 1.23.)

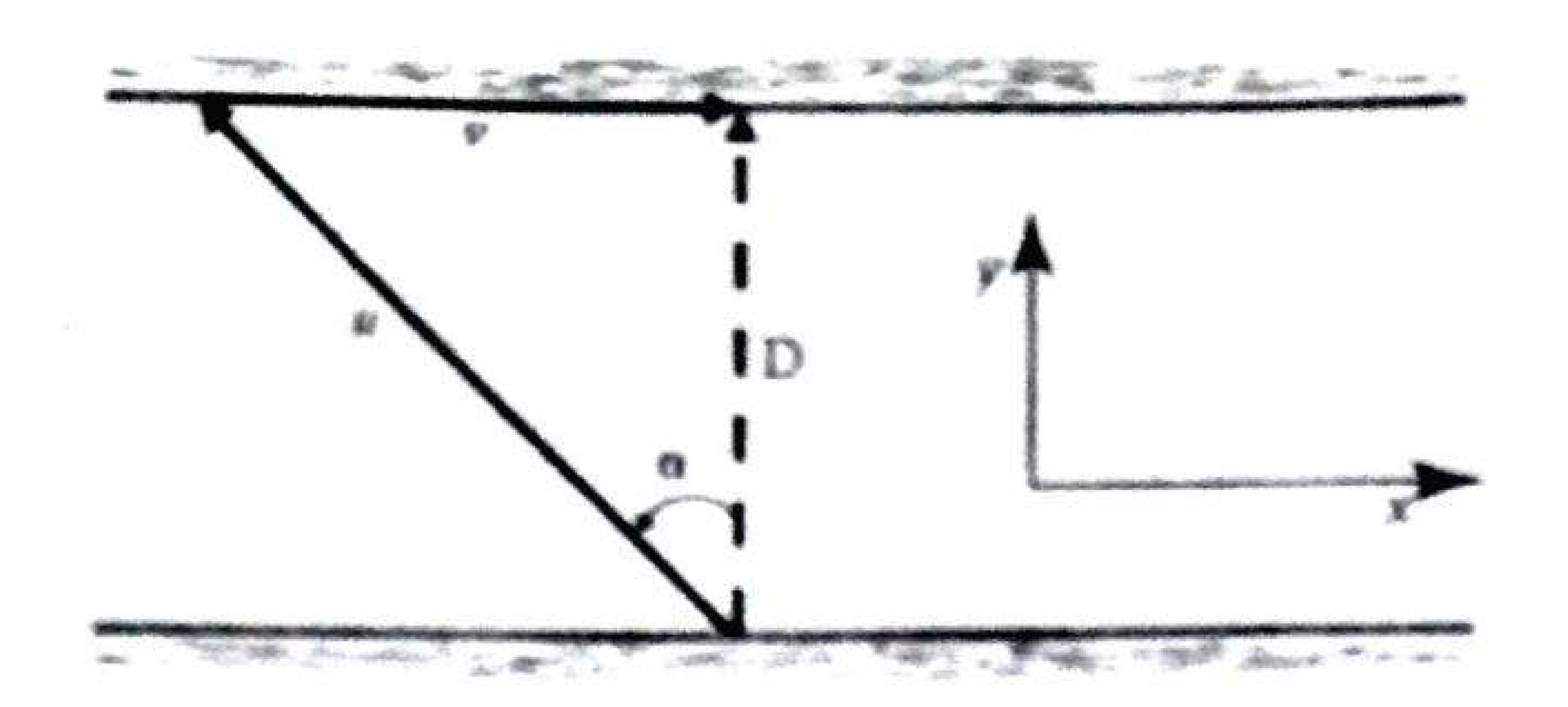


Figura 1.23

3. En un sistema inmóvil de referencia caen gotas de lluvia de manera vertical con velocidad u. Encontrar el ángulo α' que forma la trayectoria de las gotas con la vertical en un sistema de referencia en movimiento S'.

- **Guía.** $u_x = 0$, $u_y = -u$, $u_z = 0$. Entonces, $u'_x = -v$, $u'_y = -u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $u'_z = 0$. Por consiguiente, $\tan\alpha' = \frac{u'_x}{u'_y} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

4. Mostrar que las ecuaciones de Maxwell para el caso estacionario y sin fuentes, no son invariantes respecto de las transformadas de Galileo.
5. Demostrar la invarianza del cuadrado del intervalo entre dos eventos $(x_1, y_1, z_1; t_1)$ y $(x_2, y_2, z_2; t_2)$ respecto de las transformadas de Lorentz.
6. ¿Cual deberá ser la velocidad de un cuerpo para que sus dimensiones longitudinales observadas desde S', disminuyan en dos veces la dirección de su movimiento? $\left(v = \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$
7. En el sistema propio de referencia, la partícula μ-mesón posee un tiempo de vida $\tau_0 = 2 \times 10^{-6}$ s. Calcular el tiempo de vida de dicha partícula y la distancia que la misma recorrerá en ese tiempo, medidos ambos en un sistema de referencia respecto del cual la partícula μ-mesón se mueve con velocidad $v = 0.99c$. [$\tau = 14.1776 \times 10^{-6}$ s, $d \cong 42.1075 \times 10^2$ m].
8. Sea que S' se mueve respecto de S con velocidad v = const. Si en S' son emitidos dos rayos luminosos en la dirección positiva y negativa del eje y', determinar el ángulo de abertura observado entre estos dos rayos desde el sistema S. $\left[\theta = \pi - \frac{2\left(\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$
9. La velocidad alcanzada por un protón en un acelerador Q es de 9×10^4 km/s. Encontrar la energía total de dicha partícula expresando el resultado en MeV. [$E = 0.98$ MeV].
10. Si $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son los vectores de posición de dos eventos en S', mostrar la invarianza de $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ respecto de las transformadas de Galileo.

11. Mostrar que las ecuaciones de Maxwell para el caso estacionario y sin fuentes, no son invariantes respecto de las transformadas de Galileo.

12. Sean dos eventos que suceden en un mismo punto en S', pero en distintos momentos de tiempo. Mostrar la invarianza del intervalo de tiempo $t_2' - t_1'$ respecto de las transformadas de Galileo.

13. A lo largo de un tren que se desplaza con velocidad $v = 100$ km/h, camina una persona con una velocidad de 5 km/h respecto del mismo en dirección de su movimiento. Calcular la diferencia de velocidades de la persona respecto de la vía férrea, calculadas según la teoría clásica y la relatividad especial. $[u_{Cl} - u_{Rel} \cong 4.5 \times 10^{-14}$ km/h.]

14. ¿Qué diferencia debe atravesar un electrón para alcanzar la velocidad de $0.99c$?

- **Guía.** Al desplazar una partícula (electrón) cargada el campo eléctrico realiza un trabajo definido como $A = e(\varphi_1 - \varphi_2) = eV$ (a). Considerando la energía cinética inicial del electrón igual a cero, se tiene que el trabajo del campo eléctrico es igual a la energía cinética adquirida por el electrón, cuando éste ha pasado la diferencia de potencial ΔV buscado, es decir, $\Delta V = E_c$ (b). En este caso, la velocidad de la partícula es cercana a la velocidad de la luz, por eso sigue aplicándose la expresión (1.66), donde $\frac{v}{c} = \beta = 0.90$. Al sustituir en (b) la expresión (1.66) se sigue que $V = \frac{m_0c^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = 6.6 \times 10^5$ V.

15. Un electrón se mueve en un campo magnético uniforme de inducción $B = 5.0 \times 10^{-2}$ T y describe una trayectoria circular de radio $r = 4.0 \times 10^{-2}$ m. (a) Determinar la energía cinética del electrón.

- **Guía.** Para encontrar la energía cinética de la partícula (independientemente de si ésta es clásica o relativista), hay que conocer su masa en reposo m_0 y su momentum p. Como m_0 es conocida, entonces el problema se reduce a determinar la velocidad o el momentum del electrón. Para esto, veamos la ecuación de movimiento del electrón en el campo magnético, es decir, apliquemos la segunda ley de Newton a esta situación. En general, habría que aplicar la expresión (1.61) considerando la dependencia de la masa respecto de la velocidad. Sin embargo, no olvidemos que en el campo magnético sobre el electrón actúa la fuerza de Lorentz, la cual es todo el tiempo perpendicular al vector $\vec{v}$ y cuyo módulo no cambia. Por consiguiente, también permanece constante con el tiempo la masa de la partícula. De esta manera, independientemente de si la partícula es clásica o relativista, la segunda ley de Newton se escribe en su forma "usual" $evB = mv^2r$ (a). De esto último se encuentra el momentum del electrón $p = mv = erB$ (b). Ahora bien, para encontrar la expresión de la energía cinética, es menester verificar primero si en las condiciones dadas en el problema éste es clásico o relativista, pues la relación entre p y E_c así lo demanda. De acuerdo con (b), $p = 3.2 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Por otro lado, para el electrón $m_0c = 2.73 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, es decir, no se cumple la desigualdad $p << m_0c$ necesaria para que el electrón sea clásico. Así, el electrón en este caso es una partícula relativista. Excluyendo la cantidad β desde las expresiones (1.63) y (1.66), se sigue que $E_c = m_0c^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{p}{m_0c}\right)^2} - 1\right) = 0.28$ MeV.

16. El radio de la órbita de electrones acelerados en un betatrón es $r = 0.3$ m. El valor medio (según el área de la órbita descrita) de la inducción magnética B_{prom} al cambiar aproximadamente de manera lineal respecto del tiempo, aumenta desde cero

hasta $B_1 = 0.200$ T. Determinar la velocidad adquirida por los electrones durante este tiempo.

- **Guía.** En el campo magnético del betatrón el electrón describe una circunferencia bajo la acción de la fuerza de Lorentz. Al cambiar el campo magnético cambia también el flujo magnético a través del contorno descrito por la órbita de los electrones. Esto genera un campo eléctrico rotacional. Ahora bien, los electrones se mueven a lo largo de una de las líneas de fuerza del campo eléctrico, por lo que sus velocidades van a aumentar. La intensidad E del campo eléctrico rotacional en los puntos de la órbita de los electrones, se encuentra desde la ley de inducción electromagnética $\varepsilon = \oint E_l dl = -\dfrac{d\phi}{dt}$ (a), donde el contorno de integración coincide con una de las líneas del vector $\vec{E}$ de la forma circular de radio r. Por eso, $E_l = E =$ const. para todos los puntos del contorno y, por consiguiente, $\oint E_l dl = 2\pi r E$ (b). El flujo magnético cambia de manera uniforme con el transcurso del tiempo t desde cero hasta un valor $\phi_{máx}$; por eso, su velocidad de cambio se puede expresar como $\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{\phi_{máx}}{t} = \dfrac{B_1 \pi r^2}{t}$ (c). Desde (a)-(c) se obtiene $E = \dfrac{B_1 r}{2t}$. Esto significa que sobre cada electrón que se mueve por la circunferencia, actúa desde el campo eléctrico rotacional una fuerza de módulo constante $F = eE = \dfrac{B_1 re}{2t}$ (d) a lo largo del vector velocidad y por tanto, le comunica al electrón una aceleración tangencial. Para encontrar la velocidad que adquiere el electrón debido a la acción de la fuerza F en el transcurso de tiempo t, apliquemos la segunda ley de Newton ahora en la dirección normal a la trayectoria. En el betatrón los electrones alcanzan por lo regular velocidades cercanas a la velocidad de la luz. Por eso, si se utiliza $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \cdot \vec{B})$ y se considera (1.64), se tiene $F = \dfrac{d}{dt}\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$. Si se integra esto último y se considera que $v = 0$ cuando $t = 0$, se encuentra que $Ft = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$. Despejando de esto último la velocidad y sustituyendo (d), y los valores numéricos respectivos, se tiene finalmente $v = \dfrac{B_1 erc}{\sqrt{4m_0^2 c^2 + B_1^2 r^2 e^2}} = 0.9980c$.

17. Luego de pasar por una diferencia de potencial $\Delta V = 2.0 \times 10^3$V, el electrón ingresa a un campo magnético uniforme de inducción $B = 1.6 \times 10^{-3}$T perpendicular a las líneas de campo eléctrico. Determinar el radio r de la circunferencia que describe el electrón y su momentum angular L. $\left(r = \dfrac{\sqrt{2m\Delta V/e}}{B} = 0.09 \text{ m}; L = \dfrac{2m\Delta V}{B} = 2.3 \times 10^{-24} \text{kg} \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)$

18. Un electrón se mueve con velocidad $v = 9.0 \times 10^6 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ en un campo magnético uniforme de inducción $B = 0.63 \times 10^{-3}$ T, de modo que el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ es muy pequeño. Determinar los pasos h de la línea espiral por la que se mueve el electrón. $\left(h = \dfrac{2\pi mv}{eB} = 0.05 \text{ m} \right)$

19. Determinar la velocidad v y el momentum p de una partícula cargada, la cual pasó por una diferencia de potencial acelerador $\Delta V = 1.5 \times 10^{6}$ V. Analizar los casos para un: (a) protón, (b) electrón. $\left[\text{(a) } v = \sqrt{\dfrac{2e\Delta V}{m_p}} = 1.7 \times 10^{7}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}};\ p = \sqrt{2e\Delta V m_p} = 2.83 \times 10^{-20}\,\text{kg}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}, \right.$

$\text{(b) } v = c\sqrt{1 - \dfrac{E_0^2}{(e\Delta V + E_0)^2}} = 2.9 \times 10^{8}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}},\ p = \dfrac{1}{c}\sqrt{e\Delta V(e\Delta V + 2E_0)} = 3.0 \times 10^{-21}\,\text{kg}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}},$ donde $E_0 = m_0c^2$ es la energía en reposo del electrón$\left.\right]$

2

Teoría clásica de la radiación electromagnética

Lo más evidente es lo más misterioso.

José Emilio Pacheco

2.1. EL OSCILADOR LINEAL ARMÓNICO

Sea una partícula con masa m que se mueve por una recta bajo la acción de una fuerza. Esta última es proporcional a la desviación de la partícula de la posición de equilibrio y está dirigida siempre hacia dicha posición. Tal sistema oscilatorio es llamado **oscilador lineal armónico**. Como ejemplo del mismo puede servir una esfera pesada que pende de un resorte elástico (fig. 2.1).

Un electrón que realiza oscilaciones bajo la acción del campo eléctrico también es un oscilador lineal armónico, con la condición de que la fuerza que actúa sobre él desde el campo sea proporcional a la primera potencia de su alejamiento de la posición de equilibrio y que está dirigida hacia esta posición. En analogía con una fuerza elástica, todas las fuerzas que satisfacen la exigencia mencionada se llaman *cuasielásticas*.

Debido a que el movimiento de la partícula de un oscilador lineal sucede por una recta, siempre podrá tomarse esta recta como el eje de coordenadas.

Sea que este eje es el eje x y sea que el origen de coordenadas coincide con la posición de equilibrio de la partícula (fig. 2.2).

La ecuación de movimiento, en este caso, es

$$m\ddot{x} = -fx \qquad (2.1)$$

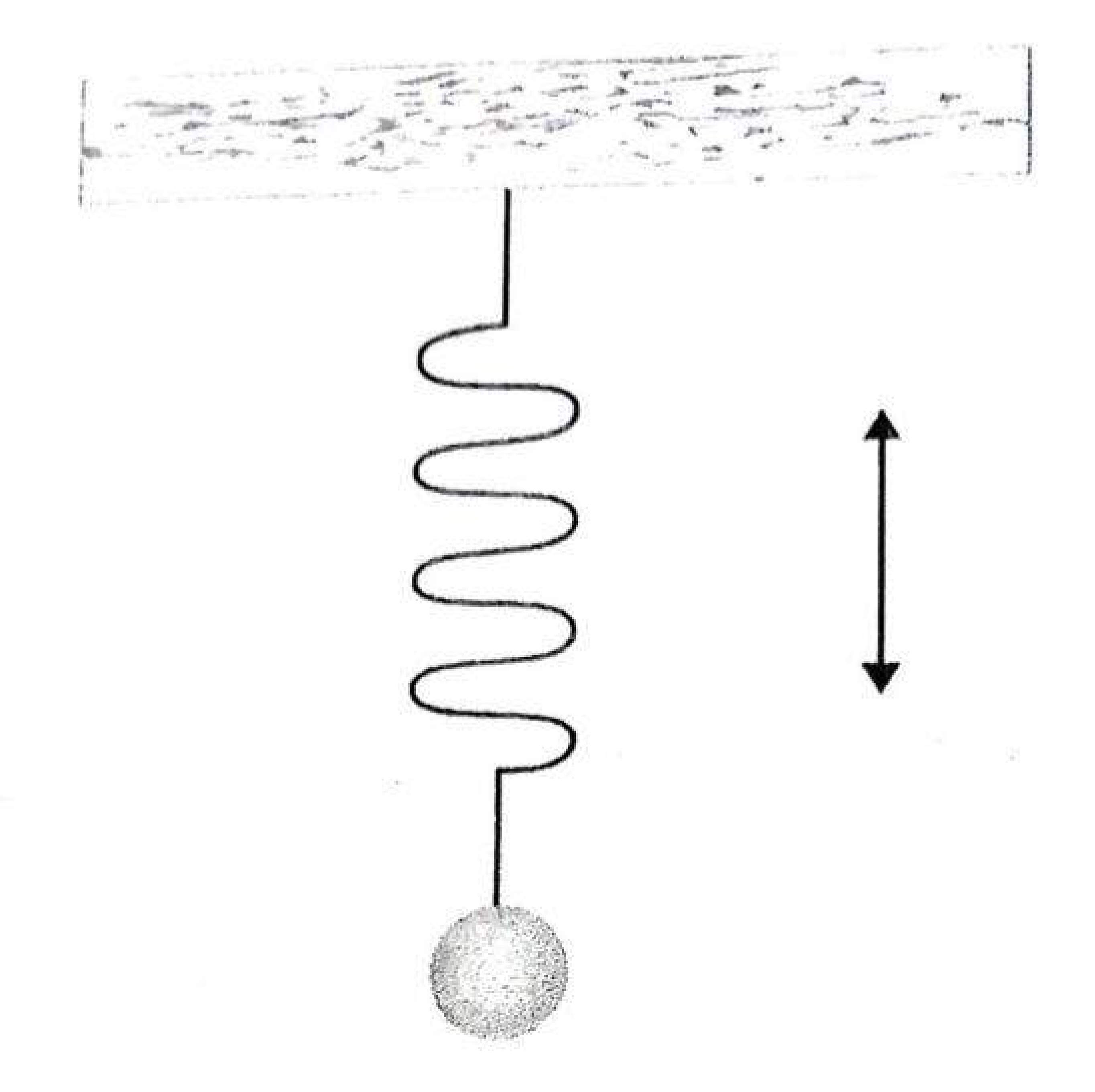


Figura 2.1. Modelo de un oscilador lineal armónico.

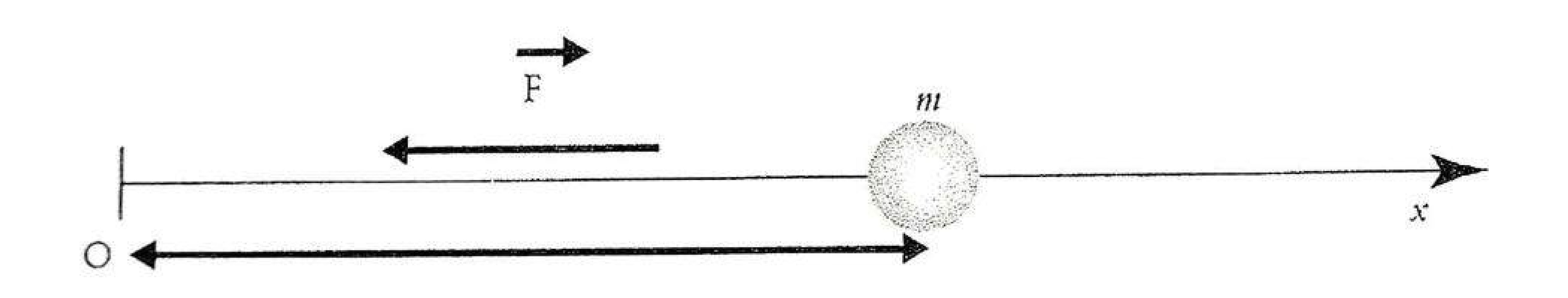


Figura 2.2. Oscilador lineal armónico. El punto 0 es el punto de equilibrio para la partícula de masa *m*.

donde f es un coeficiente de proporcionalidad igual a la fuerza que surge con una desviación $x = 1$, y también es denominado *constante de la fuerza cuasielástica*. La ecuación (2.1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\ddot{x} + \frac{f}{m}x = 0 \qquad (2.2)$$

Si se considera que $\frac{f}{m} > 0$ y se introduce la representación

$$\frac{f}{m} = \omega^2 \qquad (2.3)$$

se tiene que:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (2.4)$$

Serán soluciones particulares de esta ecuación las siguientes:

$$x_1 = \cos \omega t; \quad x_2 = \text{sen } \omega t \tag{2.5}$$

lo cual puede verificarse con la sustitución directa de (2.5) en (2.4).

Por una conocida propiedad de las ecuaciones diferenciales lineales, la solución general estará formada por la combinación lineal de las soluciones particulares (2.5):

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \text{ sen } \omega t \tag{2.6}$$

con dos constantes arbitrarias c_1 y c_2. Estas constantes pueden encontrarse desde las condiciones iniciales. Si, por ejemplo, cuando $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$, entonces puede confirmarse que $c_1 = x_0$, $c_2 = \dfrac{v_0}{\omega}$ y por eso (2.6) toma la forma:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \text{ sen } \omega t \tag{2.7}$$

Ahora bien, la solución general (2.6) puede ser representada de forma diferente, como sigue. Al factorizar c_1, queda:

$$x = c_1 \left(\cos \omega t + \frac{c_2}{c_1} \text{ sen } \omega t \right) \tag{2.8}$$

Si se coloca $\dfrac{c_2}{c_1} = \tan \delta$, se tiene que:

$$x = c_1 \left(\cos \omega t + \tan \delta \text{ sen } \omega t \right)$$

$$= \frac{c_1 \cos(\omega t - \delta)}{\cos \delta} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(\omega t - \delta),$$

o si se utiliza la notación $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = a$, se obtendrá finalmente

$$x = a \cos(\omega t - \delta) \tag{2.9}$$

donde a y δ son nuevas constantes arbitrarias.

El movimiento descrito por la fórmula (2.9) será evidentemente periódico, ya que el tiempo está contenido en una función periódica de la misma ecuación. Esto significa que existe cierto intervalo mínimo de tiempo $T \neq 0$, tal que:

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega(t + T) - \delta)$$

De esto se sigue que:

$$\omega T = 2\pi,$$

y por tanto,

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

ω es llamada frecuencia angular o cíclica $\left(\frac{rad}{s}\right)$, y la magnitud inversa al periodo T frecuencia lineal f$\left(\frac{1}{s} \text{ o Hz}\right)$.

De acuerdo con (2.3),

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{m}} \tag{2.10}$$

y por tanto,

$$\mathrm{f} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{m}} \tag{2.11}$$

Enseguida se analizará la *energía del oscilador*. La **energía cinética** es igual a $E_c = \frac{m}{2}\dot{x}^2$, y considerando (2.9), ésta se escribe como:

$$E_c = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\mathrm{sen}^2(\omega t - \delta) \tag{2.12}$$

Si por valor cero de la energía potencial se acepta su magnitud en el momento cuando la partícula se encuentra en la posición de equilibrio, entonces la **energía potencial** en cierta posición con coordenada x será

$$E_p = -\int_0^x Fd\xi = f\int_0^x \xi d\xi = f\frac{x^2}{2} \tag{2.13}$$

Si se sustituye x desde (2.9) y se considera que desde (2.3), $f = m\omega^2$, se encuentra que:

$$E_p = ma^2\omega^2\frac{\cos^2(\omega t - \delta)}{2} \tag{2.14}$$

Con ayuda de las expresiones (2.12) y (2.14) se encuentra la **energía total**

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \tag{2.15}$$

Las fórmulas (2.12) y (2.14) muestran que las energías cinética y potencial cambian en el tiempo como los cuadrados de las funciones seno y coseno.

Por eso, para la búsqueda de los valores medios de la energía en un periodo completo, es suficiente calcular los valores medios de los cuadrados del coseno y seno. Durante esto, la presencia de la constante de fase δ, que no depende del tiempo, no desempeña ningún papel de importancia para el caso que se analiza.

Utilizando la definición del valor medio de una magnitud en el periodo T, se tiene

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1+\cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} \qquad (2.16)$$

$$\overline{\text{sen}^2 \omega t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \text{sen}^2 \omega t dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1-\text{sen} 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} \qquad (2.17)$$

Hay que señalar que los valores medios de $\cos^2 \omega t$ y de $\text{sen}^2 \omega t$ en un intervalo de tiempo muy grande comparado con el periodo, son también iguales a $\frac{1}{2}$. Sea que t_1 es un intervalo de tiempo de modo que $t_1 >> T$. Se tiene entonces que:

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{t_1}\int_{0}^{t_1} \frac{1+\cos^2 \omega t}{2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega t_1}\text{sen} 2\omega t_1$$

Pero $\omega t_1 = \frac{2\pi t_1}{T}$ y si $t_1 >> T$, entonces ωt_1 es un número muy grande y por eso el segundo miembro es muy pequeño y se le puede ignorar. Y así, para un intervalo de tiempo suficientemente grande,

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} = \overline{\text{sen}^2 \omega t}$$

De esta manera, para la energía cinética media en un periodo o en un intervalo de tiempo suficientemente grande en comparación con el periodo, desde (2.12) y (2.17) se obtiene:

$$\bar{E}_c = \frac{ma^2\omega^2}{4} \qquad (2.18)$$

En tanto, desde (2.14) y (2.16) para la energía potencial media se tiene la expresión

$$\bar{E}_p = \frac{ma^2\omega^2}{4} \qquad (2.19)$$

La comparación de (2.18), (2.19) y (2.15) conlleva a lo siguiente:

$$\bar{E}_c = \bar{E}_p = \frac{1}{2}E \qquad (2.20)$$

Esto es, para un oscilador lineal armónico, la energía cinética media en un intervalo grande de tiempo es igual a la energía potencial media y ambas son iguales a la mitad de la energía total. (Este resultado es un caso particular del teorema del virial [17].)

Debido a que la energía potencial E_p es proporcional al cuadrado del desplazamiento $E_p = f\frac{x^2}{2}$, entonces la curva potencial del oscilador armónico es una parábola (fig. 2.3).

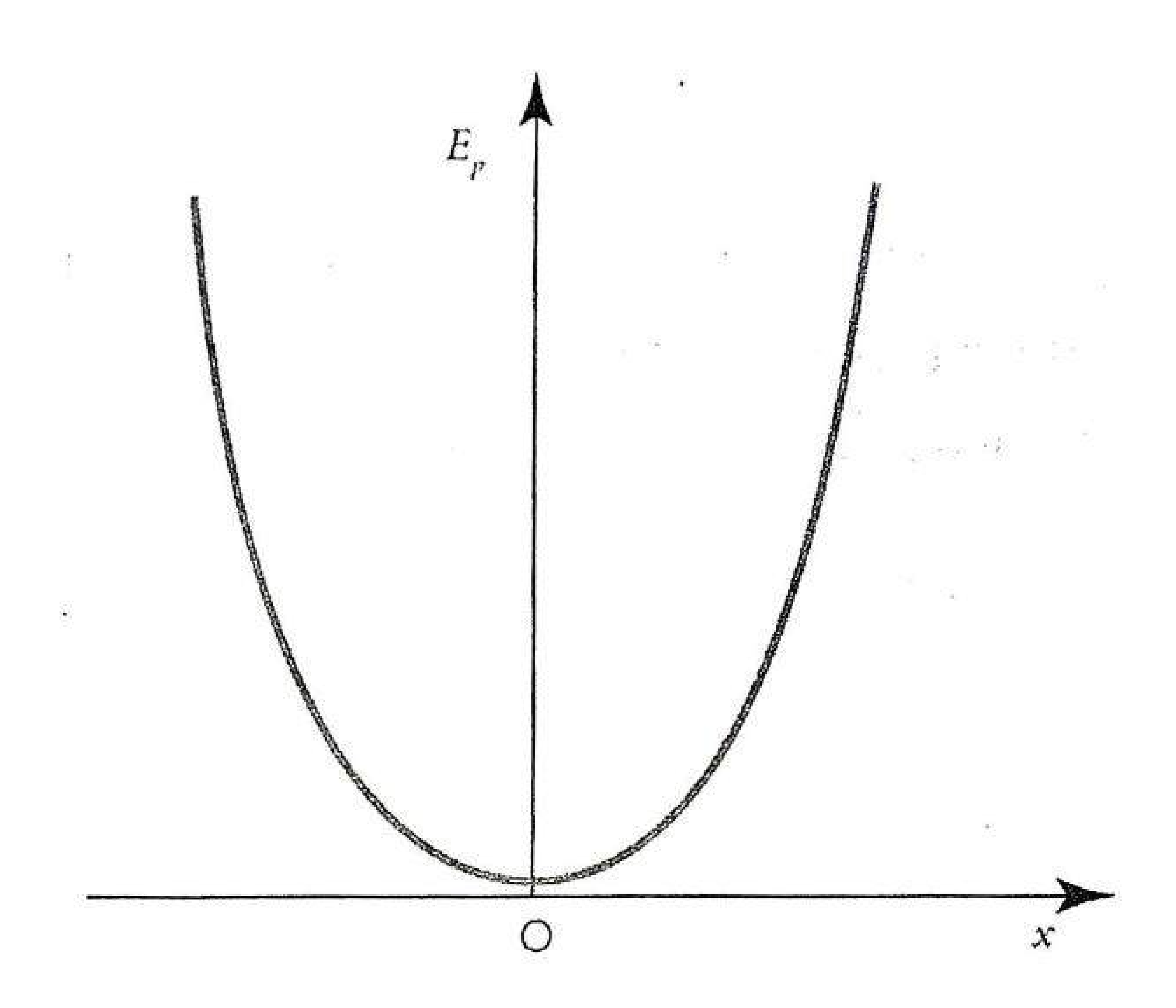


Figura 2.3. Energía potencial del oscilador armónico.

2.2. CENTROS DE EMISIÓN ELEMENTALES DE LUZ

El problema de la radiación luminosa ocupa un lugar central en la teoría de la estructura del átomo, debido a que la luz facilita la mayor cantidad de información sobre la estructura interna del mismo. Serán dedicados al estudio de este problema algunos temas de la teoría clásica de la radiación electromagnética, cuyo conocimiento es necesario para comprender mejor la teoría moderna.

Luego del descubrimiento de los electrones (J. J. Thomson, en 1898) quedó claro que la emisión luminosa está condicionada por el movimiento de los mismos. Esto se observó más claramente en la influencia del campo magnético sobre la emisión de la luz descubierto por Zeeman en 1896.

La teoría de este fenómeno elaborada por Lorentz, permitió calcular la magnitud $\frac{e}{m}$ para los centros elementales de radiación y resultó que coincide satisfactoriamente con la magnitud de la carga específica de los electrones libres.

De esta manera, se deberá estudiar el mecanismo de emisión de la luz de acuerdo con la mecánica clásica.

Resultó que pese a la inconsistencia del modelo estático del átomo, un buen número de fenómenos ópticos pueden explicarse satisfactoriamente considerando los electrones como osciladores microscópicos, los cuales emiten ondas electromagnéticas.

De esta manera, como modelo sencillo de un centro elemental de emisión, útil en cierta manera para explicar una serie de hechos sobre la emisión de luz, puede servir un oscilador con las propiedades mecánicas ya descritas.

2.3. RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA DEL OSCILADOR LINEAL

Supóngase que una carga positiva está relacionada con una masa tan grande que a ésta se le puede considerar inmóvil, y una carga en magnitud igual a la positiva pero de signo contrario, realiza oscilaciones alrededor de la carga positiva. Dicho sistema será un oscilador lineal. Desde el punto de vista del electromagnetismo, este sistema es un dipolo. Las propiedades eléctricas del dipolo se caracterizan por una magnitud llamada *momento dipolar*. El momento dipolar es un vector definido como:

$$\vec{P} = e\vec{r} \tag{2.21}$$

donde $\vec{r}$ es un vector de desplazamiento mutuo entre las dos cargas, y está dirigido de la carga negativa a la positiva. Debido a que el momento dipolar no depende de la elección del origen de coordenadas, las componentes de $\vec{P}$ serán

$$\vec{P} = e\ (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \tag{2.22}$$

donde $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ son los vectores unitarios en dirección x, y, z respectivamente.

El cálculo del campo electromagnético del dipolo que realiza oscilaciones se puede efectuar con ayuda de las ecuaciones de Maxwell [12]; sin embargo, aquí sólo serán mostrados los resultados principales.

Los campos eléctrico y magnético de un dipolo oscilante, a distancias suficientemente grandes de él (la así denominada *zona ondulatoria* o *zona de radiación*) están caracterizados por las intensidades $\vec{E}$ y $\vec{H}$ iguales en magnitud absoluta y mutuamente perpendiculares en dirección. Para el caso de pequeñas velocidades respecto de la velocidad de la luz ($v << c$), los valores absolutos de las intensidades $|\vec{E}|$ y $|\vec{H}|$ en el punto M (fig. 2.4) ubicado a una distancia R del dipolo, se expresan por la fórmula

$$|\vec{E}| = |\vec{H}| = \frac{\ddot{\vec{P}}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{Rc^2}\ \mathrm{sen}\ \theta \tag{2.23}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, θ es el ángulo entre la recta a lo largo de la cual se realizan las oscilaciones y la dirección en el punto M y $\vec{P}$ es función de $t - \dfrac{R}{c}$.

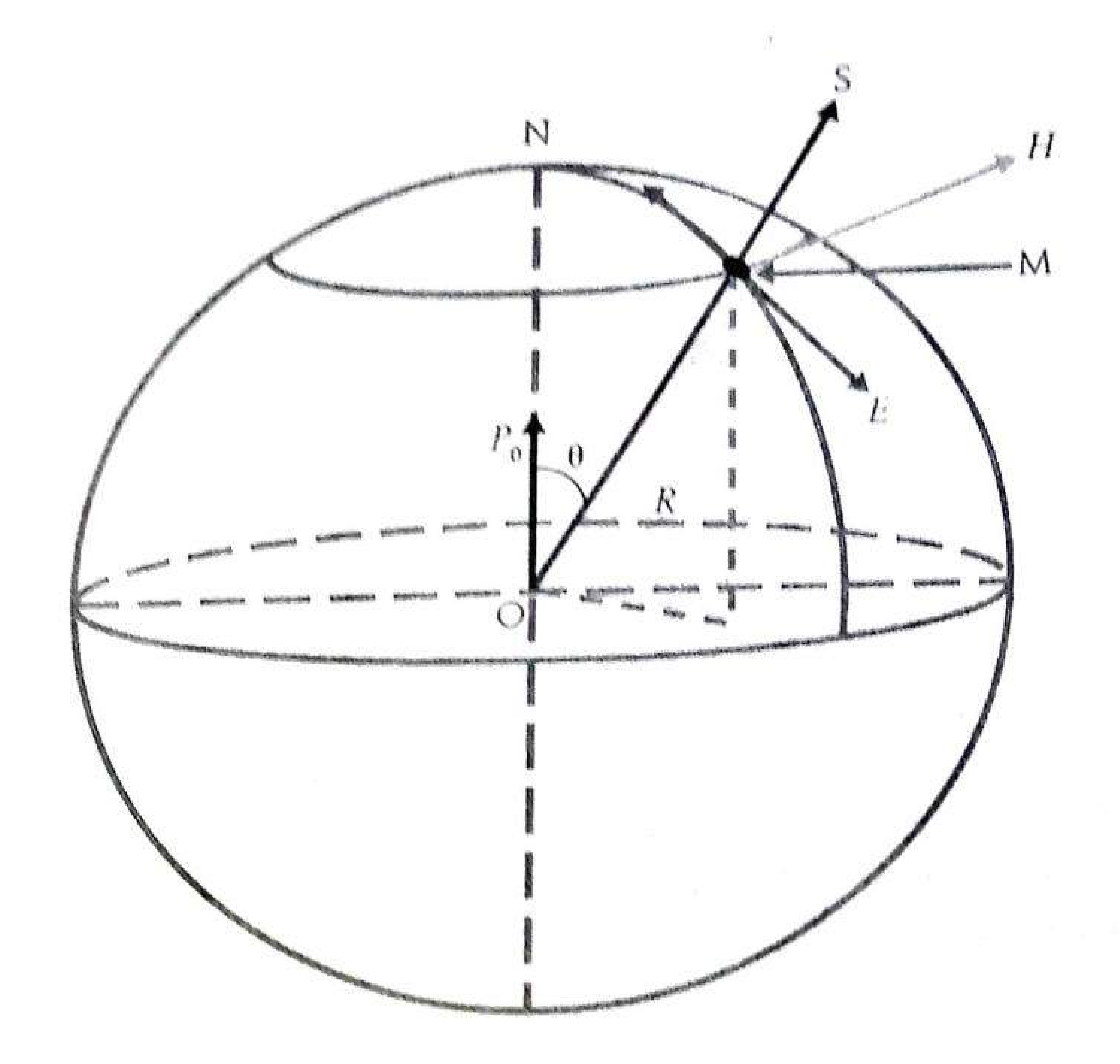


Figura 2.4. En la zona de radiación los vectores eléctrico $\vec{E}$, magnético $\vec{H}$ y de Poynting $\vec{S}$ forman una terna de vectores mutuamente ortogonales. La cantidad $\vec{P}_0$ corresponde a la amplitud del vector de momento dipolar $\vec{P}$.

El símbolo $\ddot{\vec{P}}\left(t-\frac{R}{c}\right)$ representa la segunda derivada del momento dipolar considerado ya no para el momento de tiempo t, sino para un momento anterior de tiempo $t-\frac{R}{c}$ (tiempo de retardo).

Es evidente que $\frac{R}{c}$ es el tiempo necesario para que el proceso (onda electromagnética), que se propaga con velocidad c desde el origen O, logre llegar hasta el punto de observación M. De esta manera, la presencia del valor retardado de $\ddot{\vec{P}}\left(t-\frac{R}{c}\right)$ indica sobre la finitud de la velocidad de propagación del campo electromagnético: el dipolo eléctrico oscilante emite ondas electromagnéticas que se desplazan con velocidad c en el vacío.

Puesto que $\vec{P}=e\vec{r}$, se observa que en iguales condiciones y a grandes distancias de O, los campos eléctricos y magnéticos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ dependen de la aceleración del electrón.

Las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{H}$ se determinan de la manera siguiente: sea que desde O es descrita una esfera de radio R. Considérese como eje polar la dirección de la recta a lo largo de la cual se realizan las oscilaciones del dipolo y trácense sobre dicha esfera meridianos y paralelos. Entonces, el vector $\vec{E}$ estará dirigido según la tangente al meridiano que pasa por el punto M y el vector $\vec{H}$ según la tangente al paralelo que pasa por el mismo punto, de la manera como se indica en la figura 2.4.

La densidad de energía del campo electromagnético es

$$\rho = \frac{E^2 + H^2}{8\pi},$$

o si se considera que para el caso dado de la zona ondulatoria, $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, entonces:

$$\rho = \frac{E^2}{4\pi}\left(\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}\right) \qquad (2.24)$$

Puesto que el campo del dipolo oscilante se propaga con velocidad c, entonces a través de cada cm^2 en dirección de la normal al punto M, cada segundo pasa una cantidad de energía S igual a:

$$S = \rho c = \frac{c}{4\pi} E^2 \left(\frac{\text{erg}}{\text{s cm}^2}\right) \qquad (2.25)$$

La magnitud S es evidentemente el valor numérico del flujo de energía que pasa a través del punto dado. Éste puede ser calculado también como el valor numérico del vector de Poynting $\vec{S}$ en el punto dado,

$$S = |\vec{S}| = \frac{c}{4\pi}|\vec{E} \times \vec{H}| = \frac{c}{4\pi} EH \text{ sen}\left(\vec{E}, \vec{H}\right)$$

En la zona ondulatoria se cumple (véase [9,13]) la igualdad $|\vec{E} \times \vec{H}| = EH$, por lo que la última expresión toma la forma

$$S = \frac{c}{4\pi} E^2,$$

es decir, la expresión (2.25).

Al sustituir en esto último la expresión (2.23) y considerar enseguida (2.21), se encuentra que:

$$S = \frac{\ddot{P}^2}{4\pi R^2 c^3} \text{ sen}^2\theta = \frac{e^2 \ddot{r}^2}{4\pi R^2 c^3} \text{ sen}^2\theta \qquad (2.26)$$

donde los valores de $\ddot{P}$ o $\ddot{r}$ están referidos al tiempo de retardo:

$$t - \frac{R}{c}$$

Desde (2.26) se observa que la intensidad de radiación es directamente proporcional al cuadrado de la aceleración e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, como era de esperar, ya que el flujo total de la energía a través de la esfera cuyo centro se encuentra en O, queda constante y la superficie de la esfera

crece proporcionalmente al cuadrado del radio. Luego, la presencia en la fórmula (2.26) de $\text{sen}^2\theta$ conlleva a la no uniformidad en la distribución de la intensidad en diferentes direcciones: en dirección de la recta a lo largo de la cual se realizan las oscilaciones ($\theta = 0$ y π), ella es igual a cero y alcanza el valor máximo en la dirección perpendicular a esta recta $\theta = \frac{\pi}{2}$. En la figura 2.5 se muestra el diagrama polar sobre la distribución de la intensidad de radiación según los valores del ángulo θ.

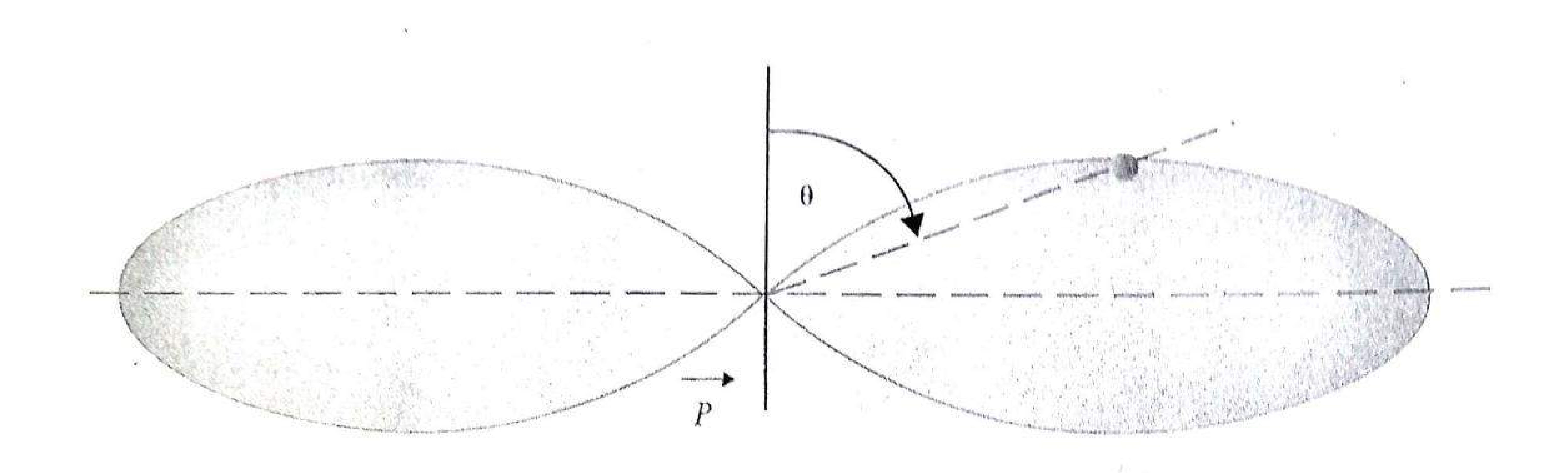


Figura 2.5. Diagrama polar para la distribución de la intensidad de radiación del dipolo.

El experimento confirma dicha distribución de la intensidad. Uno de los ejemplos más ilustrativos relacionado con esto, es el surgimiento de los rayos Roentgen durante el frenado (aceleración negativa) de los electrones en el anticátodo. En la figura 2.6 se muestran los resultados de la investigación experimental de la dependencia de la intensidad (I) de la radiación Roentgen de frenado con respecto al ángulo θ para diferentes velocidades de los electrones. Como se observa, en los casos cuando $\theta = 0, \pi$ la intensidad es cero. Para los electrones de baja velocidad $\left(\beta_1 = \frac{v}{c} = \frac{1}{120}\right)$ el máximo de la intensidad se obtiene cerca de $\theta = \frac{\pi}{2}$, y para los de altas velocidades $\left(\beta_{2,3} = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ los máximos están desplazados en la dirección del movimiento de los electrones.

Esta no correspondencia con la fórmula (2.26) se explica sobre la base de que la misma ha sido obtenida para el caso de bajas velocidades sin considerar los efectos relativistas.

Para grandes velocidades, Sommerfeld obtuvo lo siguiente:

$$S = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi R^2 c^3} \frac{\text{sen}^2\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^6}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

lo cual concuerda bien con el experimento para cualesquiera valores de β.

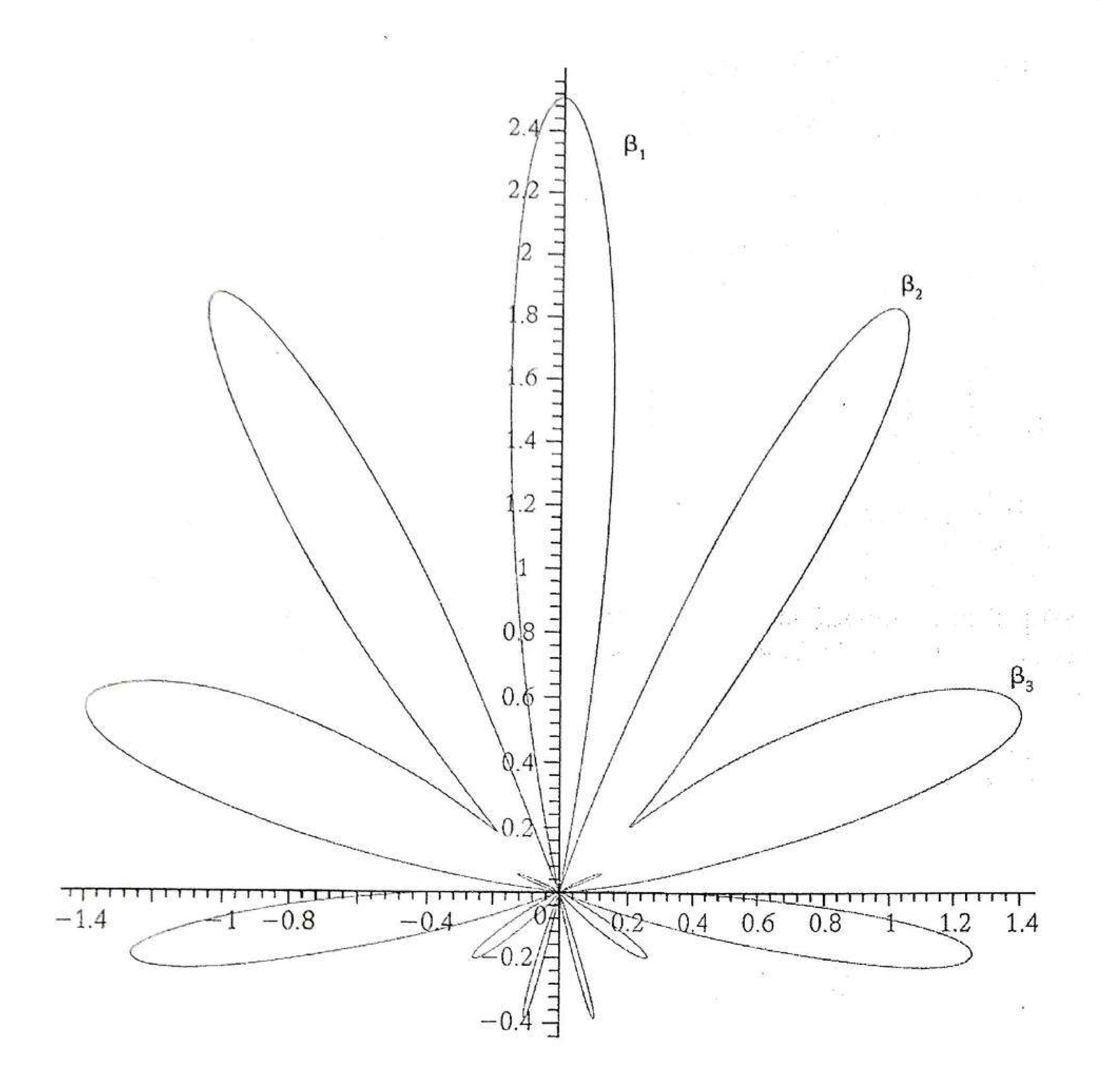


Figura 2.6. Resultados experimentales de la dependencia de la intensidad de radiación de frenado (Roentgen) respecto del ángulo θ para diferentes velocidades de los electrones. Dicho ángulo es trazado a partir del eje de las abscisas hacia el eje de las ordenadas.

2.4. RADIACIÓN TOTAL Y MEDIA DE UN OSCILADOR

La fórmula (2.26) proporciona el flujo de energía que pasa en un momento dado a través de un punto elegido en una dirección caracterizada por el ángulo θ; es decir, la intensidad instantánea de la onda electromagnética en una dirección determinada.

Si se requiere calcular la cantidad total de energía emitida por el oscilador en la unidad de tiempo, es suficiente encontrar la magnitud de la integral

$$I = \int S d\sigma \tag{2.27}$$

extendiendo la integración a toda la superficie de la esfera descrita desde O.

Si se considera que el elemento de superficie en coordenadas esféricas es:

$$d\sigma = R^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi,$$

al sustituir posteriormente el flujo S desde (2.26) en (2.27), se tiene:

$$I = \iint \frac{\ddot{P}^2}{4\pi R^2 c^3} \operatorname{sen}^2 \theta R^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{\ddot{P}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta d\theta = \frac{\ddot{P}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta d\theta \qquad (2.28)$$

$$= \frac{\ddot{P}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta$$

Para calcular esta última integral, es necesario introducir una nueva variable $\xi = \cos \theta$ y tomar en cuenta el hecho de que los límites de integración con esta nueva variable serán +1 y −1:

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta = \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) d\xi = \frac{4}{3}$$

Al regresar a (2.28), se obtiene finalmente:

$$I = \frac{2\ddot{P}^2}{3c^3} = \frac{2e^2\ddot{r}^2}{3c^3} \qquad (2.29)$$

La fórmula así obtenida proporciona evidentemente la cantidad de energía total en el momento dado. Debido a que $\ddot{P}$ cambia periódicamente con el tiempo, cambia también la energía total I. Desde el punto de vista práctico, representa especial interés el conocimiento de la energía media y no de la instantánea. Esto es así, pues a consecuencia de la alta frecuencia de las oscilaciones de la luz (para la región visible del espectro f es del orden de 10^{15} s^{-1}) todos los dispositivos, incluyendo el ojo humano, no alcanzan a distinguir las oscilaciones y reaccionan sólo a la energía media. Y ahora, calculando esta energía media en un intervalo de tiempo suficientemente grande, por ejemplo en un segundo, se tiene que ella es igual a la media en un periodo:

$$\bar{I} = \frac{2\overline{\ddot{P}^2}}{3c^3} \qquad (2.30)$$

Si el momento dipolar cambia según la ley de oscilaciones $P = P_0 \cos \omega t$ armónicas, entonces:

$$\ddot{P} = -\omega^2 P_0 \cos \omega t \qquad (2.31)$$

Al sustituir este valor de $\ddot{P}$ en (2.30), se obtiene:

$$\overline{I} = \frac{2\omega^4}{3c^3} P_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{\omega^4}{3c^3} P_0^2 \tag{2.32}$$

Ahora, supóngase que la carga positiva reposa en el origen de coordenadas, mientras que la negativa realiza oscilaciones en el eje x. Entonces $P = ex$ y la radiación media durante un periodo con base en (2.29) se expresará de la forma:

$$\overline{I} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\ddot{x}^2} \tag{2.33}$$

Si las oscilaciones son armónicas, entonces $x = a \cos \omega t$, y en lugar de (2.32) se obtiene

$$\overline{I} = \frac{a^2 e^2 \omega^4}{3c^3} \tag{2.34}$$

es decir, la media de la energía total de un oscilador armónico es función de la frecuencia a la cuarta potencia.

2.5. ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO DE UN OSCILADOR NO ARMÓNICO

Las oscilaciones senoidales armónicas rigurosas son una abstracción matemática y en la naturaleza nunca se verifican. En el caso de oscilaciones mecánicas, la ley cuasielástica para la fuerza tiene lugar solamente para pequeñas desviaciones. Para grandes desviaciones, en la expresión de la fuerza surgen elementos con grados más altos de desplazamiento y, en el espectro mecánico junto con la frecuencia principal, sus aberturas. Ahora, se analizará cómo es el espectro* de una onda electromagnética que surge debido a oscilaciones de la carga que no son armónicas, sino que se subordinan a una ley más compleja.

Por lo pronto, van a considerarse estas oscilaciones rigurosamente periódicas en el sentido matemático.

La energía media de un oscilador que realiza un movimiento no armónico será calculada por la fórmula (2.33).

Debido a que el desplazamiento x representa en sí una función periódica del tiempo, es posible desarrollarle en la correspondiente serie de Fourier:

$$x = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{is\omega_0 t} \tag{2.35}$$

Si se calcula ahora la segunda derivada de x, se encuentra la media en el tiempo, para sustituirle luego en (2.33).

* Por espectro se entiende la distribución de la energía en términos de la frecuencia o longitud de onda.

La segunda derivada respecto de t será:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -[A_1\omega_0^2 e^{i\omega_0 t} + A_2(2\omega_0)^2 e^{2i\omega_0 t} + \cdots] \\ &= A_{-1}\omega_0 e^{i\omega_0 t} + A_2(2\omega_0)^2 e^{-2i\omega_0 t} + \cdots \\ &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s (s\omega_0)^2 e^{is\omega_0 t}\end{aligned} \tag{2.36}$$

Para calcular la media en un intervalo grande de tiempo, es suficiente encontrar la media en un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. La media del cuadrado $\overline{\ddot{x}^2}$ será, por eso,

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{-2\pi/\omega_0} \ddot{x}^2 dt \tag{2.37}$$

A continuación, hay que sustituir $\ddot{x}^2$ desde (2.36), para luego integrar miembro a miembro. Para esto, se requiere calcular integrales de la forma

$$A_k A_\ell \int_0^{-2\pi/\omega_0} e^{i(k+\ell)\omega_0 t} dt$$

Mediante el cálculo directo puede mostrarse que todas estas integrales son iguales a cero, a excepción de aquellos casos cuando $\ell = -k$. Finalmente, se tiene que:

$$\overline{\ddot{x}^2} = 2\left[A_1 A_{-1}\omega_0^4 + A_2 A_{-2}(2\omega_0)^4 + \cdots + A_k A_{-k}(k\omega_0)^4 + \cdots\right] \tag{2.38}$$

o ya que $2A_k A_{-k} = \frac{a_k^2}{2}$ (véase [14]), se obtiene:

$$\overline{\ddot{x}^2} = 2\left[a_1^2\omega_0^4 + a_2^2(2\omega_0)^4 + \cdots + a_k^2(k\omega_0)^4 + \cdots\right] \tag{2.39}$$

Al sustituir esto en la fórmula (2.33) para la radiación media, se tendrá que:

$$\overline{I} = \omega_0^4 e^2 \frac{a_1^2}{3c^3} + (2\omega_0)^4 e^2 \frac{a_2^2}{3c^3} + (3\omega_0)^4 e^2 \frac{a_3^2}{3c^3} + \cdots \tag{2.40}$$

Enseguida, si se compara (2.40) con (2.34) se observa que la radiación media de un oscilador, cuyo movimiento es periódico pero no armónico, está compuesta de la suma de elementos en la que cada uno de ellos representa en sí la radiación media de un oscilador armónico. Además, las frecuencias de estos osciladores forman la sucesión

$$\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \ldots$$

Esto significa que *el espectro electromagnético del oscilador no armónico contiene las mismas frecuencias que su espectro mecánico*. La singularidad característica de

este espectro consiste en que en él están contenidas la frecuencia principal ω_0 y sus aberturas armónicas; es decir, si se representa el espectro en escalas de frecuencias, se obtendrá una serie de líneas igualmente alejadas. Precisamente, un espectro con dichas características es proporcionado por las ondas electromagnéticas emitidas con las antenas del radiotelégrafo. Las oscilaciones infrarrojas de los iones en las moléculas dan un espectro compuesto de líneas que aproximadamente se subordinan a esta ley, pero que poco se acercan en la medida en que aumenta el orden de abertura. Al fin, los espectros condicionados por los movimientos de los electrones, visuales y ultravioletas, ya no siguen para nada esta ley: en ellos, las líneas se acercan rápidamente en la medida en que pasan a más altas frecuencias hasta su total conjunción. Como se verá más adelante, las líneas en los espectros visible y ultravioleta se subordinan por completo a otras leyes cuyas explicaciones pudieron ser dadas solamente con base en la teoría de los cuantos.

2.6. AMORTIGUAMIENTO DE LAS OSCILACIONES

Hasta ahora, se ha aceptado calladamente que la energía del oscilador es constante; es decir, que el oscilador emite ilimitadamente ondas electromagnéticas no amortiguadas. Estrictamente, tal suposición no corresponde a la realidad, ya que durante las oscilaciones libres del oscilador la onda electromagnética saca energía. Debido a esto, la reserva de energía del oscilador disminuye gradualmente y las oscilaciones se amortiguan.

Ahora es necesario encontrar, antes que nada, la ley de decrecimiento de la energía con el tiempo. Distintos datos experimentales señalan que la amortiguación de los átomos emisores es pequeña: por ejemplo, el estudio sobre la interferencia de la luz con grandes diferencias de recorrido conllevó a la conclusión de que la longitud de una serie de ondas emitidas por el átomo sin amortiguación, corresponde a más de 10^8 longitudes de onda. Atendiendo a esta circunstancia, se puede considerar que las oscilaciones de un electrón poco se distinguen de las armónicas. Pero para el caso de oscilaciones armónicas, como se sabe, la energía media sacada por la onda electromagnética por unidad de tiempo es igual a:

$$\overline{I} = \frac{e^2 a_0^2}{3c^3}\omega^4 \tag{2.41}$$

El decremento de la energía del oscilador por unidad de tiempo será igual precisamente a esta cantidad de $\overline{I}$; es decir,

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 a_0^2}{3c^3}\omega^4,$$

o

$$dE = -\frac{e^2 a_0^2}{3c^3}\omega^4 dt \tag{2.42}$$

La energía total del oscilador armónico, de acuerdo con (2.15), es:

$$E = \frac{ma_0^2}{2}\omega^2 \tag{2.43}$$

Luego de dividir (2.42) entre (2.43), se obtiene:

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}dt \tag{2.44}$$

Al introducir la notación

$$\frac{2e^2\omega^2}{3mc^3} = \gamma \tag{2.45}$$

la expresión (2.44) se escribirá de la forma:

$$\frac{dE}{E} = -\gamma dt \tag{2.46}$$

de donde al integrar se encuentra que:

$$E = E_0 e^{-\gamma t} \tag{2.47}$$

De esta manera, se observa que la energía del oscilador decrece con el tiempo según la ley exponencial.

La constante γ introducida en la relación (2.45) posee un determinado sentido físico. Para encontrarle es necesario señalar que la unidad de esta constante es:

$$[\gamma] = \text{s}^{-1},$$

lo que es sencillo de confirmar al indicarse que el producto γt que se encuentra en el exponente de (2.47) debe ser una magnitud adimensional. Así pues, la magnitud inversa de γ representa cierto intervalo de tiempo, el cual será denotado mediante τ. De esta manera,

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{3mc^3}{2e^2\omega^2} \tag{2.48}$$

La relación (2.47) puede ahora escribirse de la forma

$$E = E_0 e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \tag{2.49}$$

En esta última fórmula se observa que cuando $t = \tau$,

$$E = \frac{E_0}{\exp(1)},$$

donde exp (1) es la base de los logaritmos naturales. Así, τ es el intervalo de tiempo en el transcurso del cual la energía del oscilador decrece en exp (1) = 2.718... veces. Ya desde (2.49) se observa que con el aumento de t, la energía se acerca a cero asintóticamente, razón por la cual no se puede indicar algún momento específico de tiempo en que las oscilaciones cesan por completo.

Como medida condicional del orden de magnitud de este tiempo es cómodo utilizar precisamente la magnitud τ, la cual se denomina *tiempo de relajamiento*. Así pues, la constante de amortiguamiento γ es la magnitud inversa del tiempo de relajamiento.

Para establecer el orden de magnitud de τ, será calculado su valor numérico para la línea azul del espectro de emisión del hidrógeno (línea β) cuya longitud de onda es:

$$\lambda = 4861.33 \times 10^{-8}\ \text{cm}$$

En este caso,

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi \times 3 \times 10^{10}\ \text{cm/s}}{4861.33 \times 10^{-8}\ \text{cm}} = 3.87 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1}$$

Al sustituir en (2.48) el valor numérico de ω y también los valores de las constantes universales correspondientes, se encuentra que $\tau \approx 10^{8}$ s.

Esto último muestra que la magnitud absoluta del tiempo de luminiscencia es muy pequeño. Sin embargo, su magnitud relativa será

$$\frac{\tau}{T} \approx 6 \times 10^{6};$$

es decir, es una magnitud muy grande. T es el periodo de las oscilaciones.

2.7. FRICCIÓN LUMINOSA

Ya fue establecido que la energía de un dipolo oscilante decrece con el tiempo de acuerdo con la ley (2.47) o (2.49).

Si la fuerza bajo cuya acción suceden las oscilaciones es cuasielástica, entonces puede calcularse la suma de las energías potencial y cinética del oscilador. Sin embargo, esta suma no será una constante debido a la presencia de amortiguamiento.

En mecánica se encuentra un caso similar, cuando las oscilaciones de un oscilador mecánico suceden en un medio viscoso: la reserva de su energía mecánica (cinética + potencial) decrece con el transcurso del tiempo.

Es por eso que en el balance de la energía aparece un déficit. La energía se gasta de manera irreversible y finalmente se transforma en calor.

Este déficit puede calcularse introduciendo cierta fuerza disipativa R; es decir, una fuerza que conduce a la dispersión de la energía en la parte derecha de la ecuación de las oscilaciones. De esta manera, en la ecuación (2.1), junto con el término correspondiente a la fuerza cuasielástica $-fx$ aparecerá la fuerza disipativa R o fuerza de fricción.

Análogamente, puede establecerse el balance energético también para el caso de las ondas electromagnéticas amortiguadas de un oscilador. Puede suponerse que dichas oscilaciones son frenadas por una fuerza disipativa, la que es razonable denominar **fuerza de fricción luminosa**. Es evidente que esta fuerza surge como resultado de la acción inversa del campo de la radiación del oscilador sobre él mismo.

Ahora será encontrada la expresión para esta fuerza. En mecánica se acepta a menudo que la fuerza de fricción depende de la velocidad; es decir, de la primera derivada $\dot{x}$ (a velocidades no muy grandes, la fuerza de fricción es proporcional a $\dot{x}$). Claro está, no hay ninguna base para aplicar esta dependencia a la fuerza de fricción luminosa sin un análisis previo sobre su significado y consecuencias, por esta razón, será aplicado un sencillo método sin tener que partir de la aceptación mencionada. Para ello será encontrado el valor medio del trabajo que realiza la fuerza de fricción luminosa durante un intervalo de tiempo suficientemente grande, en comparación con el periodo de las oscilaciones.

El trabajo de la fuerza R en un intervalo de tiempo dt está dado por la expresión:

$$Rdx = R\dot{x}dt$$

El valor medio para este trabajo en el intervalo de tiempo desde 0 hasta t será, por eso,

$$\frac{1}{t}\int_0^t R\dot{x}dt$$

Puesto que la fuerza de fricción luminosa fue introducida para describir el decremento de la energía, es correcto entonces considerar que el valor medio del trabajo de esta fuerza debe ser igual al valor medio de la energía emitida por el oscilador durante el mismo intervalo de tiempo. De acuerdo con la fórmula (2.33), esto último proporciona la siguiente expresión:

$$\frac{2e^2\overline{\ddot{x}}^2}{3c^3} = \left(\frac{2e^2}{3c^3}\right)\frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}^2 dt$$

Así entonces, se tiene que:

$$\frac{1}{t}\int_0^t R\dot{x}dt = -\frac{2e^2}{3c^3t}\int_0^t \ddot{x}^2 dt \qquad (2.50)$$

Con ayuda de sencillas transformaciones e integrando por partes se sigue lo siguiente:

$$\frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}^2 dt = \frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}\ddot{x}dt = \frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}d\dot{x}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{x}}{t}\Big|_0^t - \frac{1}{t}\int_0^t \dot{x}d\ddot{x} = \frac{[(\dot{x}\ddot{x})_t - (\dot{x}\ddot{x})_0]}{t} - \frac{1}{t}\int_0^t \dot{x}(\dddot{x})dt$$

Dado que la velocidad $\dot{x}$ y la aceleración $\ddot{x}$ cambian dentro de límites definidos, entonces si se elige un intervalo de tiempo suficientemente grande, el primer elemento puede hacerse como se quiera de pequeño. Por eso, desde la ecuación (2.50) se obtiene que:

$$\frac{1}{t}\int_0^t R\dot{x}dt = \frac{2e^2}{3c^3}t\int_0^t \dot{x}(\ddot{x})dt$$

Para que esta igualdad se cumpla, es suficiente colocar:

$$R = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x} \qquad (2.51)$$

Esta es la expresión buscada para la fuerza de fricción luminosa.

Como se observa, esta fuerza depende de la tercera derivada del desplazamiento respecto del tiempo. En mecánica tales fuerzas son desconocidas.

Bien, puesto que ya se conoce la expresión para R, ésta puede ahora ser considerada al escribir la ecuación para las oscilaciones de un oscilador electromagnético. Dicha ecuación en forma general se escribe así:

$$m\ddot{x} = -fx + R,$$

o de acuerdo con (2.51),

$$m\ddot{x} = -fx + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x} \qquad (2.52)$$

De esta manera, ha sido obtenida una ecuación diferencial lineal de tercer orden. Para resolverle, su solución podrá buscarse de la forma $x = e^{i\omega t}$, con lo cual se llegaría a una ecuación característica de tercer orden. Sin embargo, aquí será utilizado el método de aproximaciones sucesivas consistente en lo siguiente: en aproximación cero, en la ecuación (2.52) puede despreciarse el segundo término por su pequeñez. Entonces, se obtiene la ecuación de las oscilaciones sin considerar la fricción,

$$m\ddot{x} + fx = 0 \qquad (2.53)$$

cuya solución es $x = e^{i\omega_0 t}$, donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{m}}$.

Si se coloca esta solución en (2.52) y se señala que:

$$\dddot{x} = -i\omega_0^3 e^{i\omega t} = -\omega_0^2\dot{x},$$

se obtendrá:

$$m\ddot{x} = -fx - \frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3}\dot{x} \qquad (2.54)$$

Al colocar como antes

$$\frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3} = \gamma \tag{2.55}$$

la ecuación (2.54) se escribirá de la forma:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.56}$$

donde $\omega_0^2 = \frac{f}{m}$, además, ω_0 es la frecuencia de las oscilaciones no amortiguadas del oscilador.

La solución de la última ecuación se buscará de la forma

$$x = e^{int};$$

entonces, luego de simplificar se tiene lo siguiente:

$$-n^2 + i\gamma n + \omega_0^2 = 0$$

Resolviendo para n, se sigue que:

$$n = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

Será considerada la siguiente notación

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}} \tag{2.57}$$

Como γ es un número pequeño y ω_0 es grande, entonces

$$\frac{\gamma^2}{4\omega_0^2} << 1 \tag{2.58}$$

y por eso, con suficiente precisión puede colocarse que

$$\omega_f = \omega_0\left(1 - \frac{\gamma^2}{8\omega_0^2}\right) \tag{2.59}$$

donde ω_f es la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas.

Es evidente que ω_f se distingue cada vez menos de ω_0 en la medida en que la constante de amortiguamiento γ disminuya su valor numérico. Para el caso de frecuencias ópticas, el amortiguamiento es tan pequeño que puede considerarse la siguiente proporcionalidad: $\omega_f \approx \omega_0$.

Por esta razón, puede considerarse con suficiente precisión que:

$$n = i\frac{\gamma}{2} \pm \omega_0,$$

y la solución $x = \exp(int)$ toma la forma:

$$x = e^{-\gamma\frac{t}{2}} e^{\pm i\omega_0 t}$$

La solución general de (2.51) es por eso:

$$x = e^{-\gamma\frac{t}{2}} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}) \tag{2.60}$$

En la parte izquierda de esta igualdad se encuentra una magnitud real (el desplazamiento x). Para que la parte derecha también sea real los coeficientes A y B, en general complejos, deberán ser complejos conjugados mutuos:

$$B^* = A$$

Si el módulo común de A y B es denotado mediante $\frac{a}{2}$ y la fase mediante δ, entonces

$$A = \frac{ae^{i\delta}}{2} \quad B = \frac{ae^{-i\delta}}{2}$$

y (2.60) se escribe como sigue:

$$x = \left[\exp i(\omega_0 t + \delta) + \exp(-i(\omega_0 t + \delta))\right] a \frac{\exp\left(\frac{-\gamma t}{2}\right)}{2} \tag{2.61}$$

$$= a \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \cos(\omega_0 t + \delta)$$

Esta fórmula describe el movimiento oscilatorio durante el cual la amplitud disminuye con el tiempo de acuerdo con la ley exponencial $\exp\left(-\gamma\frac{t}{2}\right)$. Es obvio que esta ley corresponde a la ley de decrecimiento de la energía

$$E = E_0 e^{-\gamma t},$$

pues la misma es proporcional al cuadrado de la amplitud.



Radiación del cuerpo absolutamente negro

> Cuando aparezca la gran innovación, es casi seguro que lo hará en forma confusa, incompleta y oscura. Incluso el propio descubridor la entenderá sólo a medias; para todos los demás será un misterio. Cualquier especulación que a primera vista no sea extravagante, no tiene esperanzas.
>
> FREEMAN DYSON

3.1. LA FÍSICA CLÁSICA Y EL PROBLEMA DE LA RADIACIÓN TÉRMICA

Es conocida la manera en que de acuerdo con el punto de vista de la física clásica era explicada la radiación electromagnética de los átomos. Se observaba que una serie de resultados obtenidos desde la teoría electromagnética de la luz y de la teoría electrónica coincidían muy bien con los resultados experimentales; por ejemplo, la distribución de la radiación en distintas direcciones, el efecto Zeeman simple y algunos otros fenómenos.

Además de esto, es necesario poner atención al hecho de que algunas consecuencias o resultados contradicen el experimento o tienen aplicación limitada.

Así, por ejemplo, el carácter lineal del espectro electromagnético satisface las exigencias de la teoría clásica sólo en la región de ondas largas (región infrarroja y de radio ondas); en cambio, en la región óptica del espectro la contradice bruscamente.

Sin embargo, la aplicación indiscriminada de los conceptos de la física clásica a todos los fenómenos físicos resulta incorrecta; por ejemplo, en el problema de la radiación térmica, en el que resaltaron de manera clara y por primera vez los

puntos débiles de la mecánica y la electrodinámica clásica. Además, se hizo necesaria la introducción de la hipótesis de los *cuantos*, la cual contradice resueltamente el espíritu de la física clásica.

Para analizar la esencia de este problema es necesario mostrar primero a qué contradicciones conllevó la aplicación de la física clásica en él. La experiencia cotidiana enseña que si los cuerpos sólidos se calientan a una temperatura lo suficientemente alta, se funden, es decir, comienzan a emitir luz visible; sin embargo, aun a temperaturas muy bajas, emiten energía en forma de ondas térmicas, esto es, de rayos infrarrojos.

Sea que algunos cuerpos son calentados a diferentes temperaturas y luego colocados en una cavidad circundada por paredes reflectoras ideales en la que previamente se ha practicado el vacío. Los mismos comenzarán a emitir energía conformando un campo de radiación a través del cual se realiza el intercambio energético entre dichos cuerpos. Durante esto, aunque la radiación de cada cuerpo depende de su temperatura particular y no de la temperatura de los cuerpos circundantes (ley de Prevos), los más calientes van a enfriarse, pues emiten mayor cantidad de energía que la que reciben de los cuerpos circundantes. Los cuerpos menos calientes a su vez van a calentarse porque reciben más energía que la cantidad emitida por los mismos. Dado que las ondas electromagnéticas emitidas por estos cuerpos se propagan con velocidad finita, el espacio dentro de la cavidad siempre estará "lleno" de energía radiante. La experiencia muestra que a fin de cuentas se establece un estado de equilibrio en el que todos los cuerpos adquieren igual temperatura; es decir, absorben por unidad de tiempo la misma cantidad de energía que emiten en ese mismo tiempo. La densidad de radiación en el espacio entre ellos alcanza cierta magnitud definida y correspondiente a la temperatura dada.

Este hecho es tan conocido que parece ser una conclusión natural obtenida desde las leyes de la física clásica. Sin embargo, al realizar un análisis más detallado, resulta que es precisamente incomprensible desde el punto de vista clásico.

Para ilustrar lo anterior se mostrará un ejemplo. Sea que en la cavidad mencionada se coloca un trozo de hierro cuya superficie ha sido cortada de tal manera que absorbe por completo toda la energía que incide sobre ella. Es conocido con toda certeza que dicho trozo de hierro a una temperatura de 0 °C va a emitir por cada cm^2 de superficie 3×10^5 erg/s, y durante el equilibrio térmico va a absorber a la vez del espacio circundante exactamente la misma cantidad de energía por segundo. Es conocido con igual veracidad, que en el espacio entre las paredes de la cavidad y la superficie del trozo de hierro estudiado (en general, en aquella parte del espacio que no está ocupado por partículas de la sustancia dentro de la cavidad), la densidad de la energía durante el equilibrio a 0 °C es igual a 4×10^{-5} erg/cm^3.

Por otro lado, la densidad de energía térmica dentro del mismo trozo de hierro a esta misma temperatura es aproximadamente igual a 8×10^9 erg/cm^3; esto es, en 2×10^{14} veces más que la densidad de energía de la radiación. Esta energía térmica, como ya se sabe, se almacena en las oscilaciones que realizan los átomos de hierro respecto de las posiciones de equilibrio de los mismos. *De esta manera se llega a una asombrosa conclusión: durante el equilibrio termodinámico entre los átomos oscilantes de la sustancia y la radiación electromagnética, casi toda la energía está concentrada en las oscilaciones de los átomos y sólo una parte muy pequeña de ella corresponde a la radiación, la cual se encuentra en equilibrio con aquéllos.*

Este hecho es incomprensible desde el punto de vista de la mecánica clásica;

para mostrarlo se recurrirá a un modelo sencillo del experimento analizado antes. Sea que en la superficie del agua contenida en un recipiente flotan tapones de corcho unidos por resortes de tal manera que pueden oscilar unos respecto de otros (fig. 3.1).

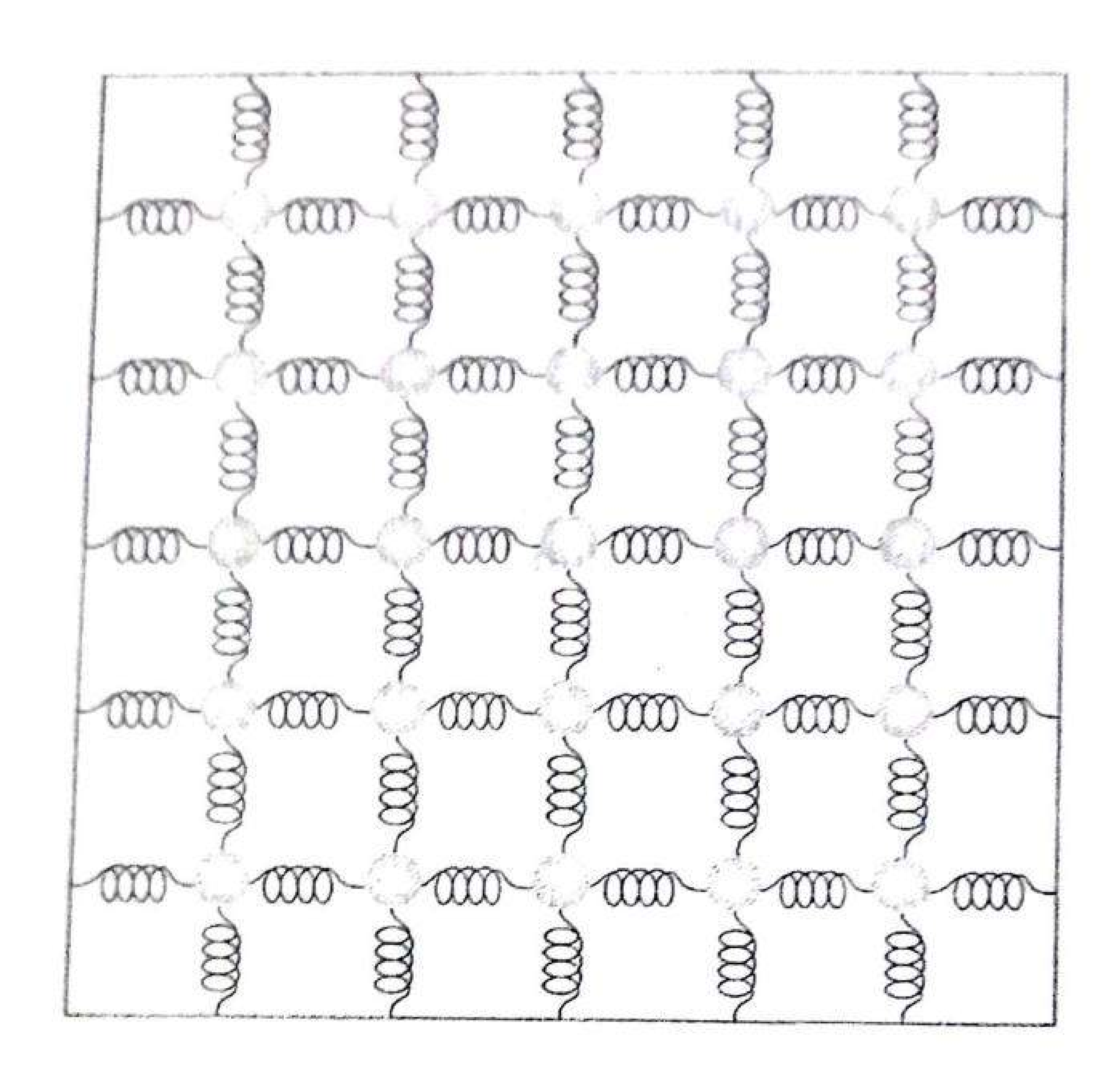


Figura 3.1. Modelo mecánico de un sólido. Los átomos (esferas sólidas suspendidas en agua) se representan unidas entre sí por resortes, los cuales reflejan la naturaleza elástica de las fuerzas interatómicas.

Al hacer oscilar los tapones, comunicarán su energía (radiarán) al agua en cuya superficie lisa surgirán ondas (olas).

Estas ondas surcarán la superficie en diferentes direcciones para reflejarse luego en las paredes del recipiente y descomponerse a su vez en ondas cada vez más pequeñas y, a consecuencia de la viscosidad característica de los fluidos, su energía de movimiento se transformará gradualmente en calor.

Es evidente que el resultado final del experimento consiste en que los tapones terminarán sus oscilaciones y toda su energía será trasmitida al medio circundante. Es incorrecto pues, imaginar que en el estado final los tapones se encuentran en un estado de oscilación intensa y que el agua no recibe parte alguna de energía. Sin embargo, esto tiene lugar precisamente durante el equilibrio entre el cuerpo calentado y la radiación. Como ya fue señalado, casi toda la energía está concentrada en las oscilaciones de los átomos y a la radiación le corresponde sólo una parte muy pequeña de ella.

Tómese ahora como modelo mecánico del cuerpo emisor, perdigones unidos también por resortes ligeros y suspendidos del techo en una cámara cerrada que contiene aire (fig. 3.2). Si estos perdigones son puestos en movimiento oscilatorio intenso y se les deja por sí mismos, provocarán en el aire circundante ondas acús-

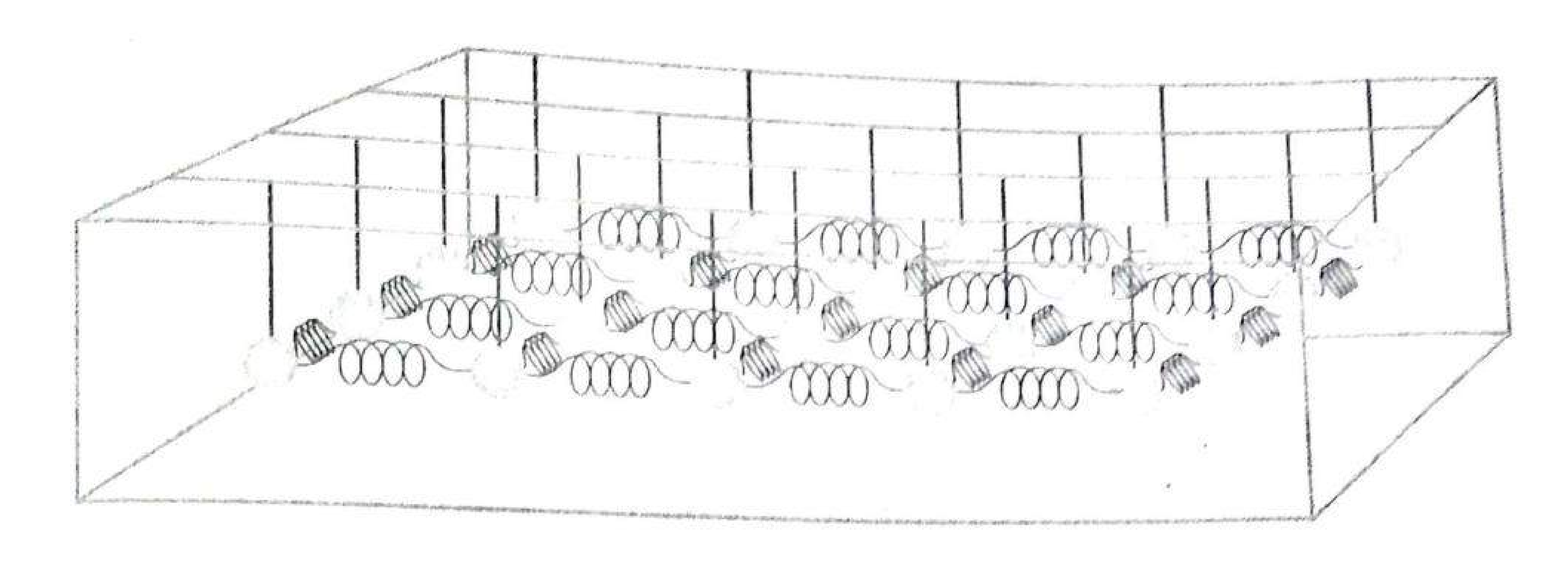


Figura 3.2

ticas que se debilitarán de manera gradual hasta desaparecer finalmente a consecuencia de la viscosidad del aire, igual que en el ejemplo anterior.

El estado final del sistema será aquel en que los perdigones reposan en sus posiciones de equilibrio y toda su reserva inicial de energía pasa a las moléculas del aire. Más exactamente, los perdigones van a realizar oscilaciones brownianas infinitamente pequeñas con velocidades correspondientes a sus masas. Sin embargo, aun con todo esto, toda la energía contenida inicialmente en el sistema pasará a las moléculas del aire.

La teoría cinética de los gases proporciona una explicación completa de la causa de tal curso de los fenómenos estudiados. En realidad, la energía cinética de las moléculas biatómicas del aire en estado de equilibrio a la temperatura T es igual a $\frac{5}{2}nkT$, donde n es el número de moléculas. La energía de n' perdigones que realizan oscilaciones brownianas es igual a $\frac{3}{2}n'kT$. La energía total de todo el sistema en el equilibrio debe ser, por eso,

$$\frac{1}{2}(5n + 3n')kT$$

Puesto que el número n de moléculas es incomparablemente mayor que el número de perdigones n', queda claro que toda la energía es prácticamente igual a $\frac{5}{2}nkT$. Así pues, durante el equilibrio la energía debe pasar de manera completa de los perdigones a las moléculas del aire.

De esta manera, se observa que la descripción del fenómeno para un *sistema radiante* de partículas y para un medio en el que la radiación se propaga, contradice en forma directa a aquel que tiene lugar experimentalmente durante el equilibrio entre un cuerpo y el campo electromagnético (radiación térmica).

La dificultad que surgió en relación con el problema de la radiación térmica consiste precisamente en que *de acuerdo con la física clásica, también durante el equilibrio de la radiación electromagnética y los cuerpos en una cavidad cerrada, prácticamente toda la energía debe estar concentrada en el campo electromagnético.*

3.2. RADIACIÓN DE EQUILIBRIO EN UNA CAVIDAD

Ahora será analizado el problema de la radiación con objeto de confirmar que la conclusión hecha al final del capítulo anterior es correcta. Sea como antes, una cavidad circundada por paredes termoaislantes calentadas hasta cierta temperatura T. Las paredes de la cavidad van a emitir ondas electromagnéticas y absorberán ondas que inciden sobre ellas desde el interior de la cavidad.

Cuando se alcanza el equilibrio en un segundo va a emitirse tanta energía como se absorbe y, ya que la radiación se propaga con velocidad finita, en el interior de la cavidad va a existir un campo electromagnético cuya densidad constante de energía es

$$u = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \tag{3.1}$$

A menudo, es más cómodo, principalmente con fines prácticos, utilizar en lugar de la densidad volumétrica de radiación u, la intensidad específica de radiación. Esta magnitud se determina de la manera siguiente.

Sea que en el campo de la radiación es analizada un área $d\sigma$ orientada de cualquier manera. A través de esta área pasará radiación en todas las direcciones posibles, pues se analiza el estado de equilibrio. Teniendo como base esta área, pueden construirse dos conos de tal manera que la radiación se propague en el interior de ellos. La cantidad de energía que pasa por unidad de tiempo a través del área $d\sigma$ hacia dentro del cono cuyo ángulo sólido es $d\Omega$ (fig. 3.3), y cuyo eje forma con la normal al área un ángulo θ, es igual a

$$d\phi = I d\sigma \cos\theta d\Omega \tag{3.2}$$

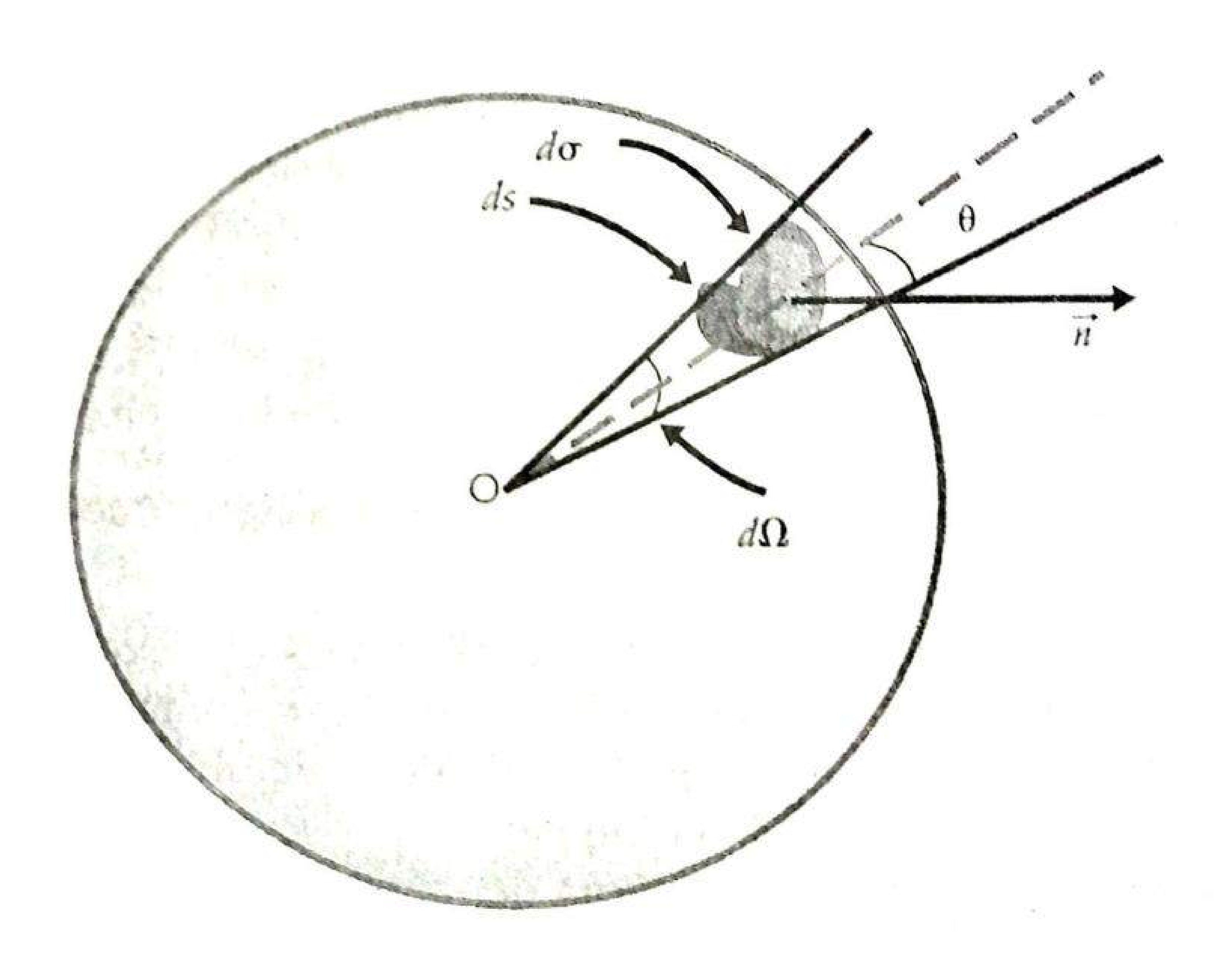


Figura 3.3

La magnitud I se denomina **intensidad específica de radiación**. Ésta es, por consiguiente, el flujo energético que pasa en la unidad de tiempo a través de un área de 1 cm^2 y que se propaga dentro de un ángulo sólido unitario en dirección de la normal al área.

Para obtener el flujo total que pasa por $d\sigma$ en la unidad de tiempo en una sola dirección, es necesario integrar la expresión (3.2) por todo el ángulo azimutal ϕ desde 0 hasta 2π y por todo el ángulo θ desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

Si se considera que:

$$d\Omega = \text{sen }\theta d\theta d\varphi,$$

se tiene entonces lo siguiente:

$$d\phi = d\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \,\text{sen}\,\theta \cos\theta d\theta$$

Si la radiación es isotrópica, es decir, si I no depende del ángulo, entonces:

$$d\phi = \pi I d\sigma$$

Evidentemente, la magnitud I desempeña para la radiación el mismo papel que la magnitud del brillo superficial de una fuente. Por esta razón, se denomina a veces **brillo superficial**.

Entre la intensidad I y la densidad volumétrica de radiación u se tiene una sencilla relación, que será encontrada ahora [15].

Sea que en el espacio se tiene un paralelepípedo cuadrangular infinitamente pequeño con una base de superficie ds y altura $d\ell$ (fig. 3.4).

Un haz de rayos penetra a través de la superficie ds, de modo que sus direcciones yacen dentro de los límites de un ángulo sólido $d\Omega$ y el eje del ángulo sólido normal a la base ds. Cada uno de estos rayos llega hasta la segunda base del paralelepípedo en un tiempo $dt = \frac{d\ell}{c}$. Durante este tiempo, a través del área ds ingresa una cantidad de energía luminosa igual a:

$$dE = Idsd\Omega dt = \frac{I}{c} d\Omega dV,$$

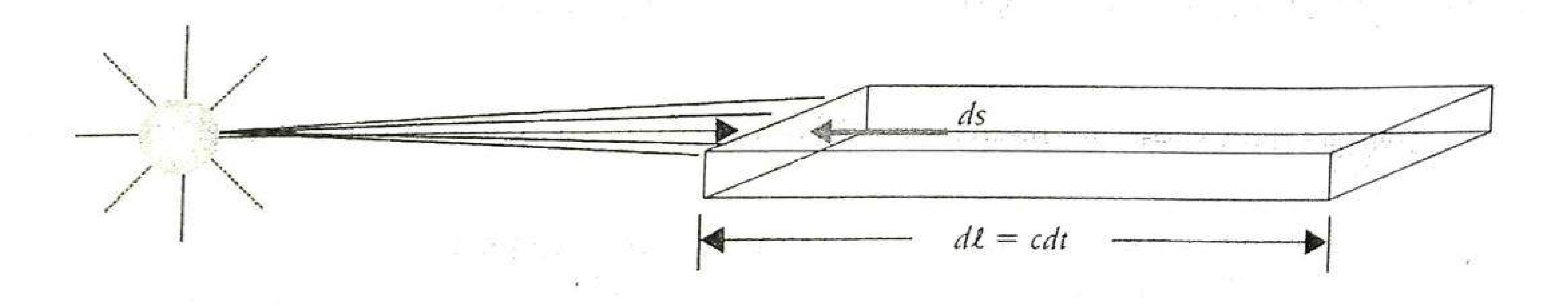


Figura 3.4

donde $dV = dlds$ es el volumen del paralelepípedo. Luego de dividir entre dV, se encuentra que:

$$\frac{dE}{dV} = \frac{I}{c} d\Omega \equiv du$$

Esta expresión es la densidad de la energía luminosa que se propaga en los límites del ángulo sólido $d\Omega$. Por su significado dicha densidad puede ser función del punto en el espacio, pero no puede depender de la forma del paralelepípedo. Por eso, para encontrar la densidad total de la energía de radiación en el punto estudiado del espacio, es necesario integrar la expresión du por todas las direcciones posibles. En general, durante la integración hay que considerar que la intensidad específica I depende de la dirección de la radiación. Sin embargo, en el caso de radiación isotrópica, como es en particular la radiación de equilibrio, no hay tal dependencia. En este caso, la integración se reduce a un sencillo cambio del ángulo sólido elemental $d\Omega$ por el ángulo sólido total $\Omega = 4\pi$. Entonces, se obtiene que:

$$u = \frac{4\pi}{c} I \qquad (3.3)$$

Luego, es necesario considerar que la radiación térmica en la cavidad posee espectro continuo. Para el análisis de su composición espectral, es necesario introducir magnitudes espectrales [17] junto a las magnitudes integrales u e I en las que son consideradas las radiaciones de todas las frecuencias que se tienen.

Para un intervalo de frecuencias infinitamente pequeño $d\omega$, puede considerarse la densidad espectral volumétrica du proporcional al intervalo $d\omega$:

$$du_\omega = \rho_\omega d\omega$$

El coeficiente ρ_ω se denomina **densidad espectral específica de radiación** o simplemente, densidad espectral. Para el espectro continuo que abarca todas las frecuencias desde 0 hasta ∞, se tiene que:

$$u = \int_0^\infty du_\omega = \int_0^\infty \rho_\omega d\omega$$

Junto con ρ_ω puede introducirse el brillo superficial espectral de radiación I_ω, luego de definirle análogamente, como fue hecho para las magnitudes integrales. Entre ρ_ω e I_ω se tiene en tal caso la misma relación que entre u e I:

$$\rho_\omega = \frac{4\pi I_\omega}{c} \qquad (3.4)$$

Finalmente, es necesario considerar que la radiación de determinada frecuencia y dirección se caracteriza aun por su estado de polarización. La radiación dentro de la cavidad está completamente no polarizada; pero un rayo no polarizado, en relación con la energía transportada, es equivalente a dos rayos polarizados en planos

mutuamente perpendiculares y que poseen la misma intensidad media. Por eso, para la radiación no polarizada se tiene que

$$I = 2\int_0^{\infty} I_{\omega} d\omega,$$

y para la radiación isotrópica homogénea no polarizada se cumple lo siguiente:

$$\rho_{\omega} = \frac{8\pi I_{\omega}}{c} \quad (3.5)$$

3.3. LEY DE KIRCHHOFF

El primer gran paso en la investigación teórica de las propiedades de la radiación en equilibrio fue realizado por Kirchhoff, quien mostró termodinámicamente que a temperatura constante la densidad espectral de radiación ρ_{ω} no depende de ninguna manera de la naturaleza y propiedades de los cuerpos que se encuentran dentro de la cavidad (incluyendo las paredes de la misma cavidad); por ejemplo, del carácter de su superficie, de la presencia o ausencia en dichos cuerpos de polos de absorción óptica selectiva, etc. Esta peculiaridad de la radiación de equilibrio surge directamente del segundo principio de la termodinámica.

En realidad, al suponerse lo contrario, es decir, que la radiación de equilibrio depende de algún modo de la naturaleza de los cuerpos contenidos dentro de la cavidad, se violaría ese equilibrio tan sólo al establecer comunicación entre dos sistemas que se encuentran dentro de la misma a igual temperatura pero que incluyen diferentes cuerpos. Esto conllevaría al establecimiento entre ambos sistemas de una diferencia de temperaturas, lo que podría ser utilizado para la construcción del *perpetuum mobile* de segundo tipo, lo cual contradice seriamente los principios termodinámicos.

Luego Kirchhoff encontró la importante relación entre las propiedades de emisión y absorción de un cuerpo para una frecuencia dada y el brillo espectral I_{ω}. Su análisis consistió en lo siguiente.

Al incidir radiación sobre un cuerpo, parte de ella se refleja irremediablemente en la superficie de separación entre el cuerpo y el medio, mientras que la otra parte penetra al interior del cuerpo.

De la energía luminosa que ingresa, parte se convierte en calor y, luego de algunas reflexiones dentro del cuerpo, la parte restante sale de nuevo al exterior.

Aquella parte de la energía incidente en el intervalo dado de frecuencias, que es absorbida por el cuerpo y que se convierte en calor, se denomina *propiedad de absorbencia del cuerpo* y se le denota como A_{ω} (número adimensional). A ésta no hay que confundirla con el coeficiente de absorción que caracteriza el debilitamiento relativo de un haz paralelo de rayos en la unidad de longitud. El cuerpo puede tener un pequeño coeficiente de absorción, pero en una gran extensión su capacidad de absorbencia puede ser muy grande. La energía emitida por cada cm^2 en un segundo es denominada *capacidad emitiva* y se le denota mediante E_{ω}.

La relación establecida por Kirchhoff es

$$\frac{E_{\omega}}{A_{\omega}} = I_{\omega} = \frac{\rho_{\omega} c}{8\pi} \quad (3.6)$$

esto es, la relación de la capacidad emitiva del cuerpo a su capacidad de absorbencia es igual al brillo superficial de radiación, la cual se encuentra con dicho cuerpo en equilibrio. Así como la densidad espectral ρ_ω (y también I_ω) no depende de la naturaleza del cuerpo, la relación (3.6) significa que la relación de la capacidad emitiva del cuerpo a su capacidad de absorbencia es la misma para todos los cuerpos. Dicha relación, que es proporcional a la densidad espectral de la radiación en equilibrio, es de esta manera una función universal que depende sólo de la temperatura y de la frecuencia.

De entre todos los cuerpos, debe tener mayor valor de E_ω aquel cuya capacidad de absorbencia sea igual a la unidad. Debido a que este cuerpo absorbe toda la energía que sobre él incide, Kirchhoff le llamó **cuerpo absolutamente negro**. Supóngase que se ha logrado construir tal cuerpo; entonces, desde la relación (3.6), cuando:

$$A_\omega = 1,$$

se obtiene

$$E_\omega = I_\omega = \frac{\rho_\omega c}{8\pi}$$

Esto significa que la capacidad emitiva del cuerpo absolutamente negro es también una función universal de la frecuencia y de la temperatura. Por eso es que si teóricamente ha sido encontrada la expresión para $\rho(\omega, T)$, y si además la prueba experimental realizada sólo para un cuerpo absolutamente negro confirma dicha expresión, entonces se puede calcular la distribución de la energía en el espectro para cualquier cuerpo, siempre y cuando se conozca su capacidad de absorbencia, la cual a su vez puede encontrarse con ayuda del espectro de absorción y de razonamientos geométricos.

De esta manera, es comprensible la gran atención que atrajo el problema sobre la búsqueda teórico-experimental de la función

$$\rho(\omega, T)$$

En realidad, ningún cuerpo en la naturaleza puede considerarse absolutamente negro, y no existe color alguno (mate) que siendo colocado sobre la superficie del cuerpo, reduzca a cero su coeficiente de reflexión. Sin embargo, la ley de Kirchhoff descubre la posibilidad de construir el cuerpo absolutamente negro. Para esto, es suficiente tomar una cavidad circundada por paredes uniformemente calentadas; entonces, la radiación de equilibrio que se establece dentro de la cavidad se caracterizará por una distribución de energía en el espectro, idéntica a la del cuerpo absolutamente negro. Por eso, si se practica un pequeño orificio en la pared de la cavidad, desde este orificio escapará radiación idéntica a la de un cuerpo absolutamente negro (fig. 3.5).

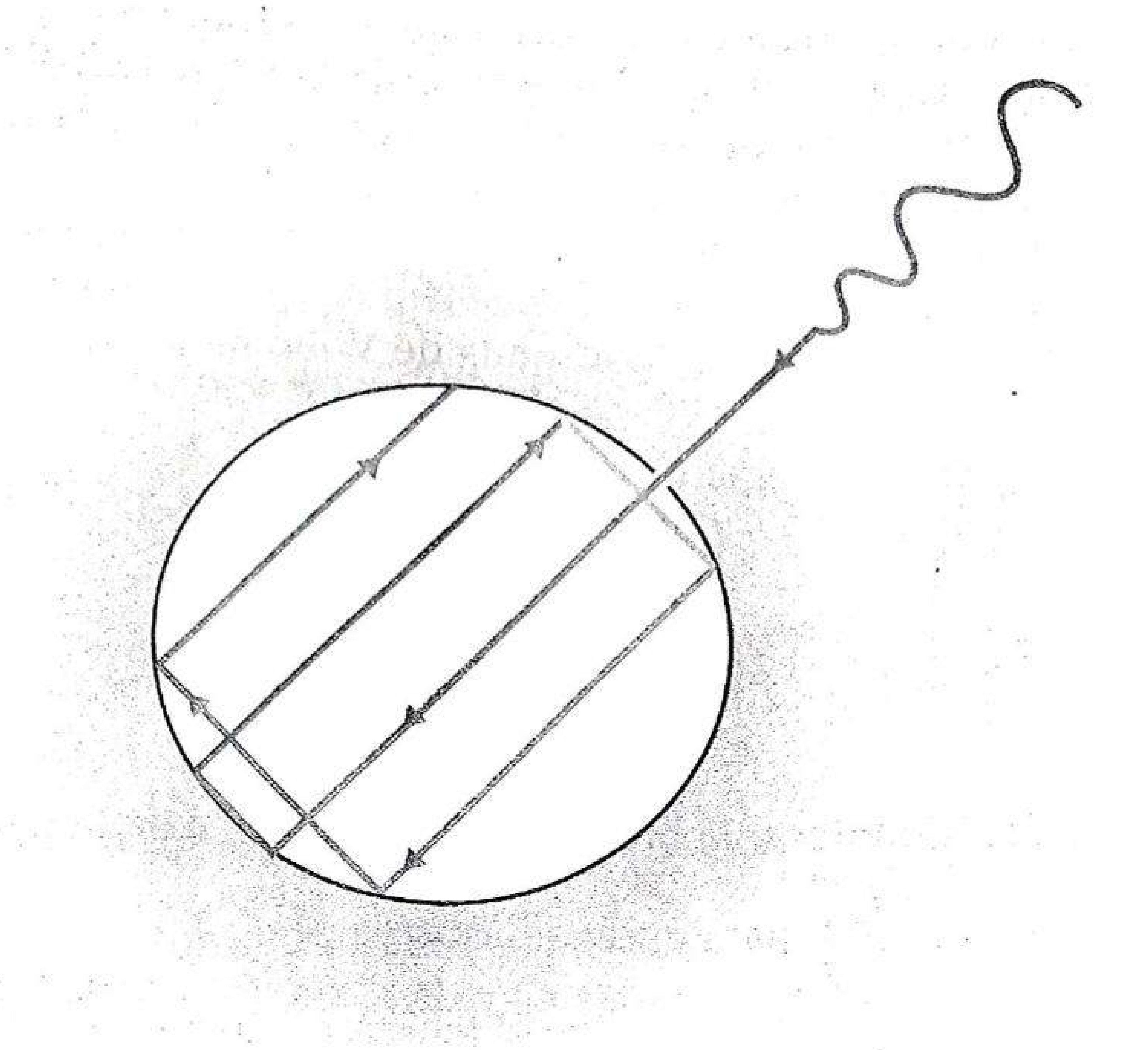


Figura 3.5. En un cuerpo se practica una pequeña abertura. Cuando la radiación incidente penetra a través de la pequeña abertura, parte se refleja y parte se absorbe en cada reflexión en las paredes interiores. Después de muchas reflexiones, prácticamente toda la energía incidente es absorbida y se tiene un ejemplo aproximado de cuerpo negro.

3.4. LEYES DE LA RADIACIÓN DEL CUERPO ABSOLUTAMENTE NEGRO

La conclusión principal a que conduce la ley de Kirchhoff puede ser escrita de la manera siguiente:

$$\rho_\omega d\omega = F(\omega, T)d\omega \tag{3.7}$$

donde $F(\omega, T)$ es cierta función universal. El siguiente problema consiste en descubrir la forma de esta función. El paso más significativo en esta dirección fue realizado por Wien, quien además de la termodinámica, utilizó la teoría electromagnética de la luz. Como resultado, estableció la siguiente ley:

$$\rho_\omega d\omega = \omega^3 F(\omega/T)d\omega \tag{3.8}$$

Aquí, $F(\omega/T)$ es una función cuya forma resultó imposible de descubrir al menos con ayuda de razonamientos termodinámicos; es decir, sin ninguna hipótesis sobre el mecanismo de emisión y absorción.

Pese a esta deficiencia, la ley termodinámica de Wien (3.8) desempeñó un papel muy importante.

En primer lugar, se redujo la búsqueda de una función de dos variables ω y T a la de una función con una sola variable ω/T, que abrió la posibilidad de calcular una curva para cualquier temperatura, siempre y cuando se conozca la curva de distribución de la energía en el espectro para alguna temperatura dada.

Por ejemplo, sea que la curva para una temperatura T_1 es conocida y se quiere calcular la curva para la temperatura T_2. Para una frecuencia ω_2 que satisface la condición $\omega_2/T_2 = \omega_1/T_1$, es decir, $\omega_2 = (T_2/T_1)\omega_1$, la fórmula de Wien indica que:

$$\rho(\omega_2, T_2) = \omega_2^3 F\left(\frac{\omega_2}{T_2}\right) = \omega_2^3 F\left(\frac{\omega_1}{T_1}\right) \tag{3.9}$$

$$= \left(\frac{T_2^3}{T_1^3}\right)\omega_1^3 F\left(\frac{\omega_1}{T_1}\right) = \left(\frac{T_2^3}{T_1^3}\right)\rho(\omega_1, T_1)$$

De esta manera, es suficiente multiplicar la ordenada de cada punto de la curva conocida $\rho(\omega_1, T_1)$ por la relación $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3$ para obtener la curva $\rho(\omega_2, T_2)$.

En segundo lugar, dado que la expresión (3.8) fue obtenida mediante razonamientos termodinámicos, deberá ser incondicionalmente válida. Por esta razón, cualquier otra fórmula obtenida con suposiciones sobre el mecanismo de emisión debe satisfacer necesariamente las exigencias expresadas en la ley termodinámica de Wien. Esto indica que debe contener, además de las constantes, la frecuencia al cubo y una función de la relación $\frac{\omega}{T}$.

De esta manera, a pesar de la presencia de la función $F\left(\frac{\omega}{T}\right)$, la ley de Wien conduce a ciertas relaciones cuantitativas perfectamente definidas. Para mostrar esto último será calculada la integral de densidad de la radiación u:

$$u = \int_0^\infty \rho_\omega d\omega = \int_0^\infty \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega$$

Al introducir la variable $\frac{\omega}{T} = \xi$, se tiene que:

$$u = T^4 \int_0^\infty \xi^3 F(\xi) d\xi \tag{3.10}$$

Si se denota toda la integral mediante la constante σ, entonces se obtendrá que:

$$u = \sigma T^4 \tag{3.11}$$

es decir, la conocida **ley de Stefan-Boltzmann**, donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann.

Es útil conocer tanto la distribución en frecuencias como la distribución en longitudes de onda. Con este fin, debe señalarse que la energía contenida en el intervalo

de frecuencias desde ω hasta $\omega + d\omega$ es igual a $\rho_\omega d\omega$. La misma energía expresada mediante la longitud de onda es igual evidentemente a $\rho_\lambda d\lambda$. Por eso, para pasar de la distribución en frecuencias a la distribución en longitudes de onda, hay que utilizar la relación

$$\rho_\omega d\omega = \rho_\lambda d\lambda \tag{3.12}$$

Luego, hay que cambiar ω y $d\omega$ por λ y $d\lambda$:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}; \quad |d\omega| = \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) d\lambda \tag{3.13}$$

Si se considera lo anterior, se obtiene que:

$$\rho_\lambda d\lambda = \rho_\omega d\omega = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega = \frac{16\pi^4 c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) d\lambda \tag{3.14}$$

Esto último es la distribución de la energía en longitudes de onda.

Para encontrar el máximo de la distribución energética debe utilizarse la condición de máximo $\frac{d\rho_\lambda}{d\lambda} = 0$.

Al diferenciar entonces la ecuación (3.14), se tiene:

$$\left(\frac{1}{\lambda^6}\right)\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) F'\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) + \left(\frac{5}{\lambda^6}\right) F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) = 0 \tag{3.15}$$

o al fin, si se introduce la notación $\frac{2\pi c}{\lambda T} = \eta$ y se simplifica, se obtiene:

$$\eta F'(\eta) + 5F(\eta) = 0 \tag{3.16}$$

Al resolver esta última ecuación se obtendrá para η un determinado valor numérico $\eta = \text{const.}$, lo cual indica que

$$\frac{c}{\lambda_{\text{máx}}} T = \text{const.}$$

donde mediante $\lambda_{\text{máx}}$ ha sido denotada la longitud de onda correspondiente a $\rho_{\lambda\text{máx}}$. En virtud de que c es una constante, entonces la última expresión puede escribirse así:

$$\lambda_{\text{máx}} T = \text{const.} \equiv b \tag{3.17}$$

Pero esto último es la bien conocida **ley del desplazamiento de Wien**; la longitud de onda correspondiente a la energía máxima en el espectro es inversamente proporcional a la temperatura absoluta (fig. 3.6).

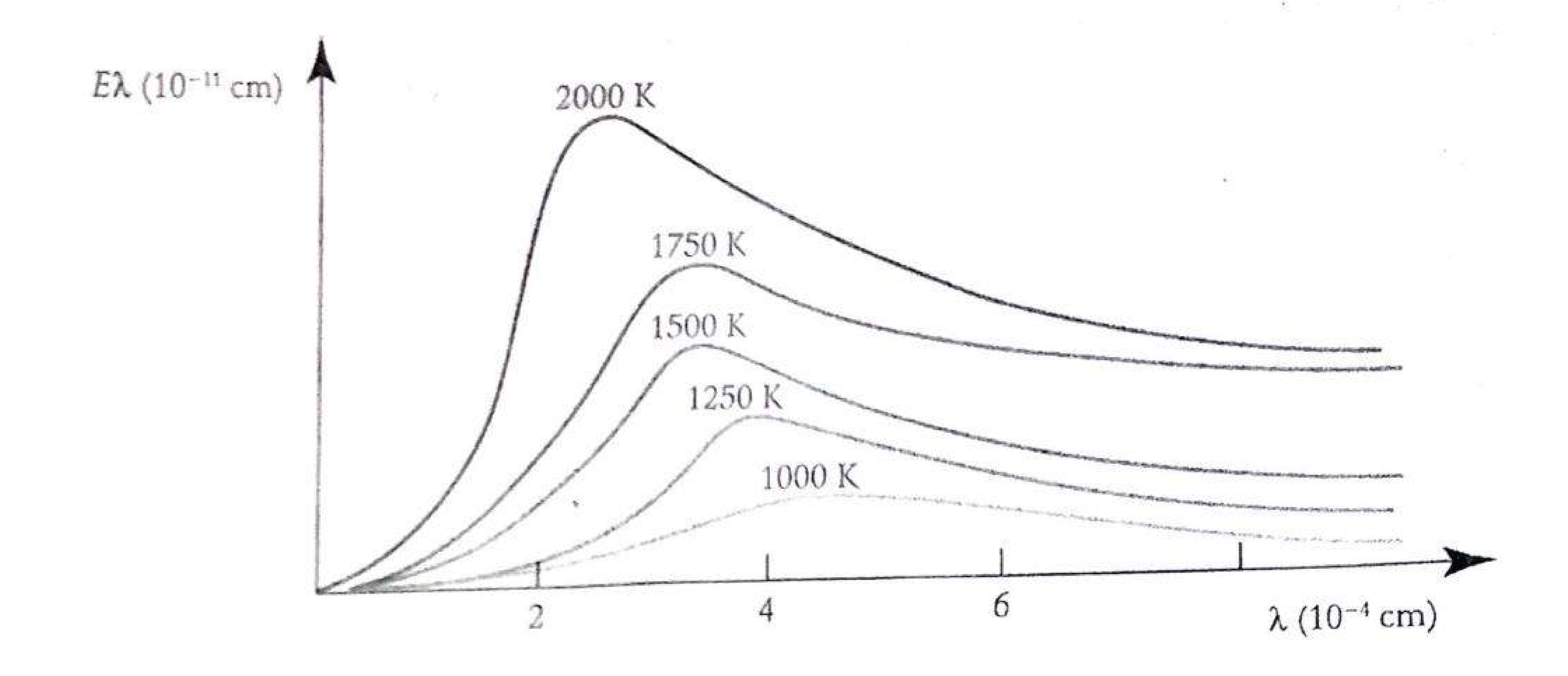


Figura 3.6. Distribución de la energía de un cuerpo negro en longitudes de onda para distintas temperaturas.

Ya se ha dicho que la construcción del modelo de un cuerpo absolutamente negro permite estudiar de manera experimental las propiedades de la radiación en equilibrio y en particular, investigar la distribución de energía en el espectro de esta radiación. Para la realización práctica del modelo de un cuerpo absolutamente negro, es necesario garantizar la posibilidad de un calentamiento uniforme de las paredes de la cavidad y la salida de radiación al exterior a través de un pequeño orificio.

Con ayuda de semejantes modelos del cuerpo negro fueron investigadas experimentalmente las leyes de la radiación, fueron determinadas en forma exacta sus constantes y estudiada la distribución del brillo de la radiación. En la figura 3.6 se muestra una serie de curvas de distribución de la energía en el espectro del cuerpo absolutamente negro para distintas temperaturas. Todas las curvas poseen un máximo pronunciado que se desplaza en dirección de las ondas cortas con el aumento de la temperatura, lo cual confirma la justeza de la ley de Wien (3.17).

Ejemplo 3.4.1

Se sabe que durante el equilibrio a una temperatura de 140 K, la distribución de energía emitida por cierta fuente es como se ilustra en la figura 3.7. Encontrar la distribución de energía para el equilibrio térmico a la temperatura de 210 K.

Solución. De acuerdo con la expresión (3.9), la curva para la temperatura de 210 K se obtiene multiplicando cada punto de la curva de la figura 3.7 por el factor $\left(\frac{210}{140}\right)^3 = 3.375$.

Ejemplo 3.4.2

Durante el equilibrio, cierta fuente emite una radiación cuya densidad es de 60 W/m^2. Determine la temperatura de la fuente respectiva.

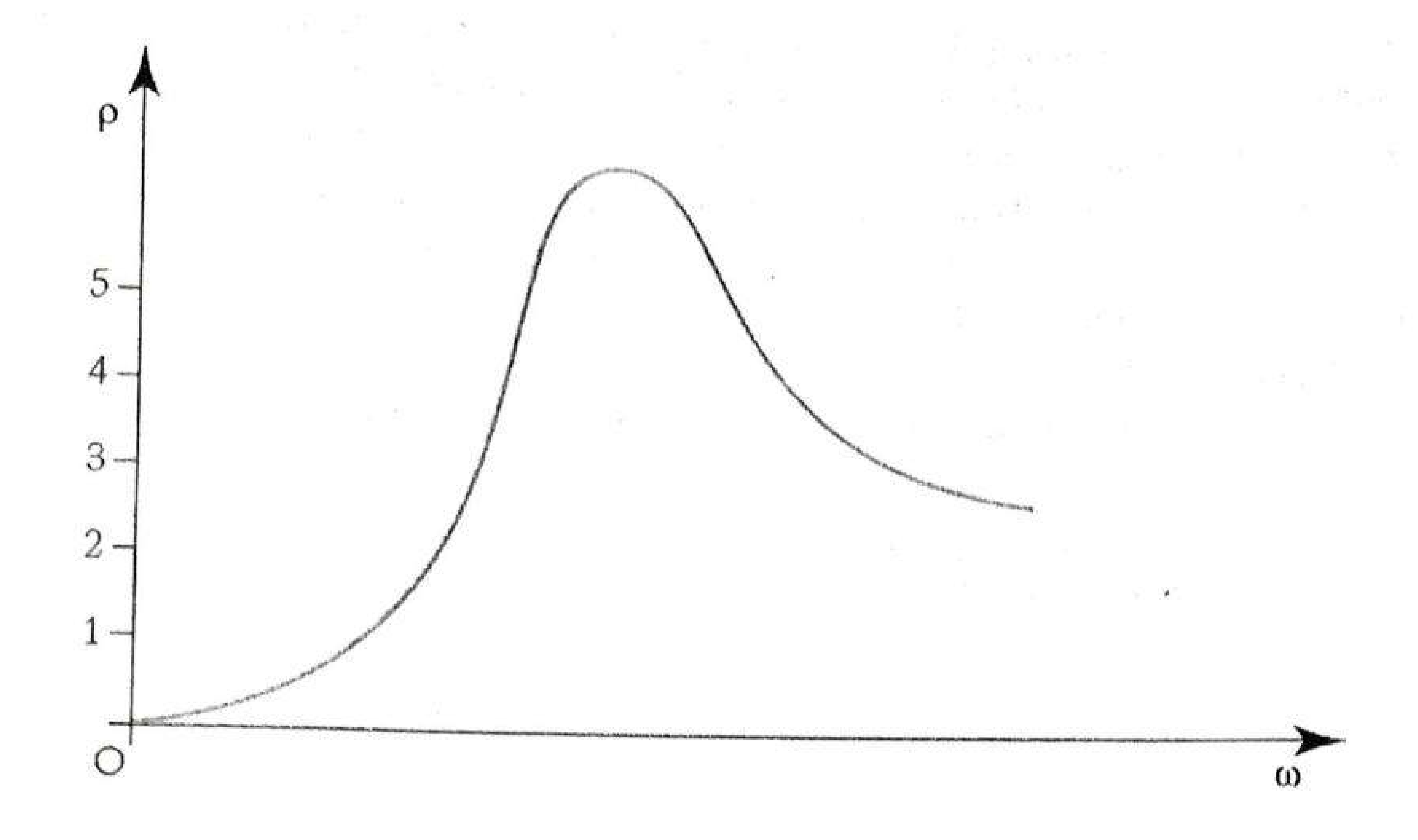


Figura 3.7. Curva característica de la distribución de la energía de radiación en equilibrio de un cuerpo negro. Para toda la curva hay una misma temperatura constante *T*.

Solución. Conforme a la ley de Stefan-Boltzmann (3.11) se tiene que

$$T = \sqrt[4]{\frac{u}{\sigma}} = \left(\frac{60}{5.67\times10^{-8}}\,\frac{\text{W m}^2}{\text{m}^2\text{W}}\text{K}^4\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{60}{5.67}\right)^{\frac{1}{4}} \times 10^2\,\text{K} = 180\ \text{K}$$

Ejercicio 3.4.1

Para una radiación con temperatura de equilibrio de 430 K, se sabe que el máximo de la distribución de energía ocurre para una longitud de onda de 1500 Å. Determine los máximos de las longitudes de onda para las temperaturas de 500 K, 600 K y 750 K.
Solución. 1290 Å, 1075 Å, 860 Å.

3.5. TEOREMA DE LA EQUIPARTICIÓN DE LA ENERGÍA

En la investigación teórica de la radiación del cuerpo absolutamente negro, desempeñó un importante papel el teorema general de la mecánica clásica, *el teorema sobre la distribución uniforme de la energía por los grados de libertad o teorema de la equipartición de la energía.*

Para ilustrar dicho teorema, primero se verá el sencillo ejemplo de un sistema compuesto de un gran número de partículas o *gas monoatómico*. La energía total del gas es la suma de las energías cinéticas del movimiento de traslación de sus moléculas. Si se pudiera medir la energía cinética de moléculas aisladas se obtendrían resultados muy diferentes; sin embargo, a temperatura constante la energía cinética media correspondiente a una molécula es una cantidad totalmente definida.

Sea ahora alguna parte del volumen del gas con un número suficientemente gran-

de de moléculas. Entonces, la energía cinética media de una molécula perteneciente a esta parte del volumen será igual a la energía cinética media calculada para otra molécula perteneciente a otra parte del volumen, con la condición de que la temperatura del gas sea igual en todas partes. Lo mismo tiene lugar si el gas es una mezcla de dos gases cuyas moléculas poseen distinta masa. La energía cinética media de unas y otras moléculas será la misma, incluso cuando ambos gases no estén mezclados, con la sola condición de que ambos se encuentren en equilibrio térmico.

La energía cinética de las moléculas de un mol de gas monoatómico es igual a:

$$E_c = N_A \frac{m\overline{v^2}}{2}$$

Además, de acuerdo con la teoría cinética de los gases,

$$PV = RT = N_A m\overline{v^2}$$

Entonces:

$$m\overline{v^2} = 3\frac{R}{N_A}T = 3kT,$$

y, por ende,

$$E_c = 3N_A \frac{kT}{2} \tag{3.18}$$

Si las moléculas del gas monoatómico son consideradas puntuales, la configuración del sistema de N masas se determina totalmente por sus $3N$ coordenadas cartesianas. Entonces, se dice que el sistema posee $3N$ grados de libertad. Sea que las coordenadas del centro de gravedad de la i-ésima masa son x_i, y_i, z_i, y sus correspondientes componentes de la velocidad serán: $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$.

La energía cinética de todo el sistema puede ser escrita como la suma de $3N$ elementos cuadráticos:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \cdots + \frac{m}{2}(\dot{x}_N^2 + \dot{y}_N^2 + \dot{z}_N^2) \end{aligned}$$

Según el teorema de equipartición de la energía [17], la energía media correspondiente a cada elemento de esta suma, es decir, a cada grado de libertad del movimiento de traslación, es la misma e igual a $\frac{1}{2}kT$. En realidad, si a cada elemento cuadrático de esta suma se le adjudica una misma energía cinética media igual a $\frac{1}{2}kT$, entonces la energía total del gas será igual a $\frac{3}{2}NkT$ de acuerdo con (3.18).

El ejemplo estudiado de un gas monoatómico se distingue por su especial sencillez, ya que sus moléculas pueden considerarse puntuales y se encuentran en movimiento de traslación. La mecánica clásica estadística basada en la mecánica de Newton, muestra que el mismo resultado tiene lugar también para el caso general.

Así, por ejemplo, sea que el gas se compone de moléculas biatómicas. Cada una de ellas posee cinco grados de libertad, tres de los cuales corresponden al desplazamiento del centro de gravedad y dos al movimiento de rotación alrededor de los dos ejes perpendiculares a la línea que une los centros de los átomos (la rotación alrededor del eje que pasa a través de ambos átomos no debe considerarse si se estudian los mismos como puntuales). En este caso, para el cálculo de la energía total del gas, hay que adjudicarle a cada grado de libertad una misma energía media igual a $\frac{1}{2}kT$.

Sea que al fin se tiene un sistema cualquiera cuya configuración está completamente determinada por f coordenadas generalizadas lagrangianas $q_1, q_2, \dots q_f$, de tal modo que el sistema posee f grados de libertad. La energía cinética de tal sistema se representa por una forma cuadrática homogénea que contiene elementos con velocidades generalizadas cuadráticas, y en general, elementos con productos pares.

Sin embargo, las coordenadas $q_1, q_2, \dots q_f$ pueden elegirse de tal manera que la energía cinética sea la suma de f elementos que contengan solamente los cuadrados de las velocidades generalizadas; es decir, que posean la forma:

$$a_i \frac{\dot{q}_i^2}{2},$$

donde los coeficientes a_i en general ya no serán totalmente iguales a las masas m_i. Por ejemplo, para la i-ésima partícula en coordenadas esféricas se tiene:

$$E_c = \frac{1}{2}\left(m_i\dot{r}_i^2 + m_i r_i^2\dot{\theta}_i^2 + m_i r_i^2 \text{sen}^2\theta_i\dot{\varphi}_i^2\right),$$

así que:

$$a_{r_i} = m_i, \quad a_{\theta_i} = m_i r_i^2, \quad a_{\varphi_i} = m_i r_i^2 \text{sen}^2\theta_i$$

Cualesquiera que fuesen las coordenadas elegidas, si la energía cinética contiene solamente elementos cuadráticos, entonces a cada uno de estos grados de libertad le corresponderá de acuerdo con el teorema de la equipartición, una misma energía cinética media igual a $\frac{1}{2}kT$.

Se tienen casos también cuando la energía potencial puede calcularse con un sencillo método. Si por ejemplo, el sistema se compone de osciladores lineales armónicos, entonces debido a que la energía potencial media de dicho oscilador es igual a su energía cinética media (sección 2.1. "El oscilador lineal armónico"), a cada grado de libertad le corresponderá una energía igual a

$$\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT$$

Para el caso general de un sistema capaz de realizar pequeñas oscilaciones, siempre podrán encontrarse coordenadas en las que no sólo la energía cinética se representa como la suma de elementos cuadráticos

$$\frac{a_i\dot{q}_i^2}{2},$$

sino que también la energía potencial sea una suma de elementos cuadráticos de la forma:

$$\frac{b_i\dot{q}_i^2}{2},$$

y el número de los últimos también sea igual al número de grados de libertad del sistema.

Las "coordenadas normales" elegidas de esta manera, se caracterizarán por el hecho de que para cada una de ellas la dependencia respecto del tiempo se representa con una función sinusoidal, y la energía cinética media de las correspondientes oscilaciones propias es igual a la media potencial. El movimiento del sistema estará dado, en este caso, por la superposición de oscilaciones lineales armónicas y la energía total será la suma de $2f$ elementos cuadráticos. A cada elemento le corresponderá una energía media $\frac{1}{2}kT$ y, por consiguiente, la energía total será fkT. En esto consiste principalmente el teorema de equipartición de la energía.

3.6. FÓRMULA DE RAYLEIGH-JEANS

Rayleigh utilizó por vez primera el teorema de equipartición de la energía para calcular la densidad de la energía electromagnética en una cavidad cerrada. Como argumento para la aplicación de este teorema en el caso dado, puede servir el siguiente razonamiento.

Sea una cavidad de volumen V en cuyo interior se ha practicado el vacío y que las caras externas de sus paredes son reflectores ideales calentadas hasta la temperatura T.

Puesto que las paredes de la cavidad a cualquier temperatura emiten ondas electromagnéticas (en particular, a bajas temperaturas-luz infrarroja), entonces dentro de la cavidad existirá un campo electromagnético. Dicho campo puede ser descompuesto en un sistema de ondas estacionarias de distintas frecuencias y direcciones. Cada una de esas ondas representa en sí un estado elemental del campo electromagnético. Según el teorema de la equipartición de la energía, durante el equilibrio entre las paredes de la cavidad y el campo electromagnético, a cada onda estacionaria deberá corresponderle una energía media igual a kT. A semejanza de como la energía media de un oscilador armónico se compone de la energía cinética media igual a $\frac{1}{2}kT$ y de la energía potencial media también igual a $\frac{1}{2}kT$, en el caso del campo electromagnético de ondas estacionarias la energía total media igual a kT

se compone de las energías medias de los campos eléctrico y magnético, cada una de las cuales es igual a $\frac{1}{2}kT$ por separado.

De esta manera, el cálculo de la energía del campo para un intervalo dado de frecuencias ω, $\omega + d\omega$ se reduce a la búsqueda del número de ondas estacionarias elementales pertenecientes al intervalo de frecuencias expresado. A su vez, encontrar el número de ondas estacionarias es equivalente a encontrar el número de oscilaciones propias libres del volumen V, el cual está lleno de un medio continuo. Conociendo la energía total del campo en el volumen V igual a $V\rho_{\omega}d\omega$, puede encontrarse la densidad de la energía $\rho_{\omega}d\omega$.

El cálculo de la densidad de energía del campo con ayuda del teorema ya mencionado, fue realizado por Jeans con el método indicado por Rayleigh. La fórmula obtenida así lleva el nombre de *fórmula de Rayleigh-Jeans*. Aunque esta fórmula resultó incorrecta en su aplicación a todo el espectro, desempeñó un importante papel en el desarrollo de la teoría de la radiación y en toda la física moderna, ya que dejó al descubierto las dificultades esenciales que tenía la teoría clásica al aplicársele a esta problemática.

Enseguida será analizada la obtención del número de oscilaciones propias del campo de acuerdo con Jeans.

Sea que en una cavidad cúbica de arista a se establece un campo ondulatorio estacionario; es decir, no depende del tiempo. Y fue señalado que el campo ondulatorio estacionario puede analizarse como un conjunto de ondas estacionarias. Sean por ejemplo las ondas cuya normal es perpendicular a dos lados paralelos del cubo. Las ondas incidentes y reflejadas que van paralelas a esta dirección en uno y otro sentido, forman ondas estacionarias. Mientras tanto, en las paredes de la cavidad se formarán ya sean nodos o valles en dependencia de la naturaleza de las ondas; por ejemplo, en el caso de ondas electromagnéticas, el campo eléctrico forma nodos en las paredes, mientras que el magnético, valles.

Sin embargo, tanto en uno como en otro caso, la condición de existencia de una onda estacionaria es de que a lo largo de la arista a se acomode un número entero de medias longitudes de onda.

Serán analizadas primeramente aquellas ondas estacionarias que forman nodos en la pared.

La condición de existencia de ondas estacionarias paralelas al plano yz consiste en que:

$$\frac{2a}{\lambda} = n_1,$$

donde n_1 es un número entero.

Semejantes condiciones tendrán lugar para ondas estacionarias con planos de igual fase, paralelas a los planos xy y xz:

$$\frac{2a}{\lambda} = n_2; \ \frac{2a}{\lambda} = n_3$$

Los sistemas analizados de ondas estacionarias con normales paralelas a los ejes de coordenadas son casos particulares. En la cavidad pueden existir ondas estacionarias dirigidas de forma aleatoria.

Ahora será analizado el caso general. Sea una onda estacionaria cuya normal forma con los ejes x y y los ángulos α y β correspondientemente. El plano de igual fase (por ejemplo, los planos nodales), paralelo a la arista vertical del cubo, coincide con el eje z.

En la figura 3.8 está representada una de las bases del cubo, es decir, el lado paralelo al plano xy, mientras que el conjunto de rectas paralelas representan trazas de los planos nodales.

La condición de existencia de las ondas estacionarias mencionadas consiste en que las distancias entre sus planos nodales, medidos por las normales a los lados del cubo, se acomoden un número entero de veces en la arista a; es decir,

$$\frac{2a}{\lambda}\cos(\alpha) = n_1; \quad \frac{2a}{\lambda}\cos(\beta) = n_2$$

Estas condiciones se obtienen al analizar la figura 3.8. Desde luego que en el caso más general, cuando la normal a los planos nodales forma con los ejes de coordenadas ángulos arbitrarios α, β, γ, deberán cumplirse al mismo tiempo tres condiciones:

$$\frac{2a}{\lambda}\cos(\alpha) = n_1; \quad \frac{2a}{\lambda}\cos(\beta) = n_2; \quad \frac{2a}{\lambda}\cos(\gamma) = n_3 \tag{3.19}$$

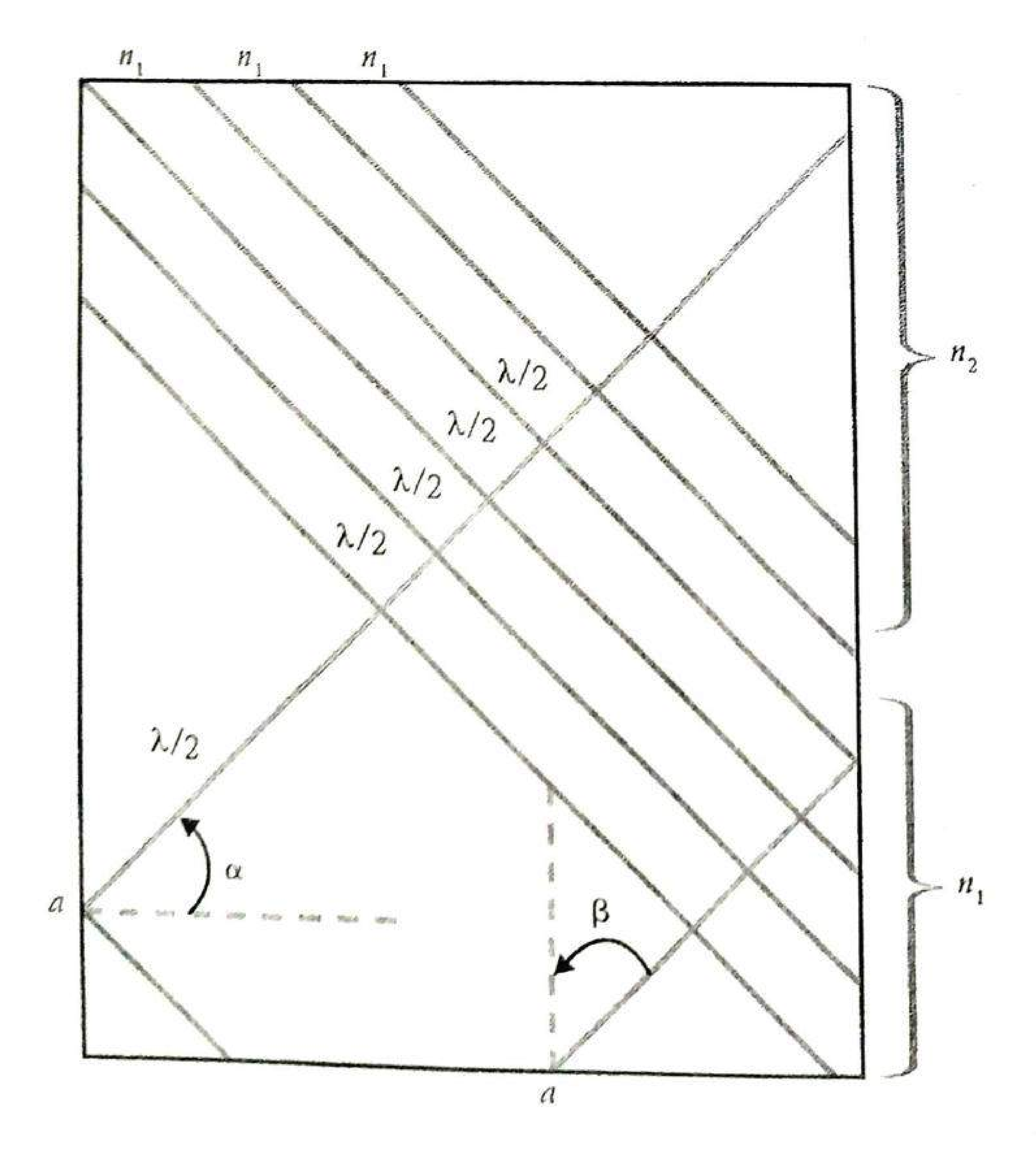


Figura 3.8

Si se elevan al cuadrado estas tres igualdades y se suman posteriormente, se obtiene lo siguiente:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{a\omega}{\pi v_\varphi}\right)^2, \tag{3.20}$$

donde v_φ es la velocidad de desplazamiento del plano de igual fase (velocidad de fase) en el medio dado. Pero esto último es la ecuación de una esfera de radio

$$R = \frac{a\omega}{\pi v_\varphi} \tag{3.21}$$

De esto último se observa que a cada terna de números enteros n_1, n_2, n_3, le corresponde una determinada frecuencia

$$\omega = \frac{\pi v_\varphi}{a}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \tag{3.22}$$

Eligiendo enseguida $\frac{\pi v_\varphi}{2}$ como la unidad, puede construirse un sistema de coordenadas cartesianas en cuyos ejes serán colocados los valores de n_1, n_2, n_3.

Con base en (3.22), a cada conjunto de valores de estos números le corresponde una determinada frecuencia. En el sistema de coordenadas elegido, al que se le llama *espacio de frecuencias*, esta frecuencia se representará por un punto con coordenadas n_1, n_2, n_3. Sin embargo, es evidente que a todos los números enteros n_1, n_2, n_3, cuya suma de cuadrados posee valor constante, les corresponden frecuencias numéricamente iguales.

A pesar de todo, estas frecuencias iguales representan en sí *distintas* oscilaciones propias de nuestro continuo, ya que a cada una de ellas le corresponde un sistema de ondas estacionarias que se distinguen por su dirección.

Para los objetivos de este análisis, es esencial que semejantes frecuencias, iguales entre sí, se representen por distintos puntos en el espacio de frecuencias.

Ahora puede calcularse el número total de frecuencias propias desde 0 hasta ω. Para esto, se construye un sistema de puntos correspondientes a todos los valores enteros posibles positivos n_1, n_2, n_3. Es evidente que dicho sistema de puntos forma una red cúbica de tal manera que la arista de un cubo elemental sea igual a la unidad y el volumen también igual a la unidad. Si la longitud de onda es lo suficientemente pequeña en comparación con las dimensiones lineales de la cavidad a, entonces la suma de los volúmenes de todas las celdillas elementales (cubitos) será con bastante precisión, igual al volumen de una octante de la esfera de radio R, determinada por las condiciones (3.21) y (3.22). Debido a que el volumen de cada celdilla es igual a la unidad, se puede afirmar también lo inverso; es decir, que el volumen de la octante (con el grado de precisión expresado) es igual al número de celdillas elementales.

Encontrando ahora los puntos representados correspondientes a una celdilla, también se encontrará el número total de frecuencias propias de la cavidad que yacen en los límites desde 0 hasta ω. Pero de manera completamente igual que en el caso de una red cúbica iónica, en que a cada celda le corresponde un ion, se puede afirmar que en el caso dado a cada cubito elemental le corresponde un número re-

presentativo. Y así, el número buscado de frecuencias de las oscilaciones libres es numéricamente igual al volumen de la octante; es decir,

$$N = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\right)\pi\left(\frac{a\omega}{\pi v_\varphi}\right)^3 = \frac{a^3\omega^3}{6\pi^2 v_\varphi^3}$$

donde v_φ es la velocidad de fase en el medio dado. Este es el número de oscilaciones propias en los límites desde 0 hasta ω. El número de oscilaciones en los límites desde ω hasta $\omega + d\omega$ es igual al número de puntos representativos, los cuales están distribuidos dentro de una octante contenida en las capas de radios $\frac{a\omega}{\pi v_\varphi}$ y $a(\omega + d\omega)/\pi v_\varphi$. Este número de puntos representados es igual al volumen de la capa expresada, es decir:

$$dN = \frac{a^3\omega^2}{2\pi^2 v_\varphi^3}\, d\omega$$

Como en el caso dado interesan sólo ondas electromagnéticas, se debe aun poner atención a que a cada frecuencia ω le corresponden dos ondas con planos de polarización mutuamente perpendiculares. Por eso, el número encontrado hay que multiplicarlo por 2, de modo que

$$dN = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V d\omega; \quad V = a^3; \quad v_\varphi \equiv c$$

Este es el número de oscilaciones propias libres del volumen V. Por el teorema de equipartición de la energía, a cada uno de ellos hay que adjudicarle una energía media kT.

Por consiguiente, la energía total en el volumen V será:

$$\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} VkTd\omega,$$

y la densidad de energía es obtenida desde aquí dividiendo entre el volumen V:

$$\rho_\omega d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} KTd\omega \tag{3.23}$$

Esta es la **fórmula de Rayleigh-Jeans**.

Con fines prácticos, es más cómodo pasar de la distribución en frecuencias a la distribución en longitudes de onda. Para el intervalo de longitudes de onda λ, $\lambda + d\lambda$ se tiene por lo anterior:

$$\rho_\omega d\omega = \rho_\lambda d\lambda,$$

y

$$|d\omega| = \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda$$

Con la ayuda de estas relaciones se obtiene desde la fórmula (3.23) que:

$$\rho_\lambda d\lambda = 8\pi kT\lambda^{-4} d\lambda \qquad (3.24)$$

Para el brillo superficial de radiación I_λ se encuentra desde (3.24) con ayuda de la relación $I_\lambda = \frac{c}{8\pi}\rho_\lambda$,

$$I_\lambda d\lambda = ckT\lambda^{-4} d\lambda \qquad (3.25)$$

Cabe señalar que la fórmula de Rayleigh-Jeans en su forma de distribución en longitudes de onda (3.24), se puede obtener sin dificultad desde el análisis de las unidades. En efecto, $f(\lambda)d\lambda$ es el número de oscilaciones libres propias del volumen V, relacionadas con el intervalo de longitudes de onda λ, $\lambda + d\lambda$. Por eso, debe ser proporcional al intervalo $d\lambda$ y a V:

$$f(\lambda)d\lambda = \eta\varphi(\lambda)Vd\lambda,$$

donde η es una constante y $\varphi(\lambda)$ es una función que hay que determinar. Pero debido a que $f(\lambda)d\lambda$ debe ser una cantidad adimensional y $Vd\lambda$ tiene unidades de cm^4, entonces $\varphi(\lambda)$ debe tener como unidad cm^{-4}, y así, $\varphi(\lambda) = \xi\lambda^{-4}$ y

$$f(\lambda)d\lambda = \mu\lambda^{-4}Vd\lambda,$$

donde ξ es un factor de proporcionalidad y $\mu = \eta\xi$.

Esta fórmula tiene lugar para cualquier medio continuo y correspondientemente para cualquier naturaleza de las ondas. Adjudicándole a cada oscilación propia de acuerdo con el teorema de equipartición de la energía, la energía media kT, se obtiene la expresión para la energía total del volumen V:

$$\mu kT\lambda^{-4}Vd\lambda$$

y para la densidad de la energía

$$\rho_\lambda d\lambda = \mu kT\lambda^{-4}d\lambda;$$

es decir, la expresión que coincide con precisión de un factor numérico μ con la fórmula de Rayleigh-Jeans. Este factor puede ser obtenido totalmente mediante el cálculo. Es interesante señalar que para el caso cuando el volumen V está lleno de un gas en el que son posibles solamente las ondas longitudinales, se obtiene que $\mu = 4\pi$; para el campo electromagnético en el que existen sólo ondas transversales pero se tienen dos tipos de ondas con planos de polarización mutuamente perpendiculares, $\mu = 8\pi$, y finalmente, para un cuerpo sólido donde son posibles ambas formas de ondas: transversales y longitudinales, $\mu = 12\pi$.

3.7. CATÁSTROFE ULTRAVIOLETA

Ahora será analizada la fórmula de Rayleigh-Jeans y se estudiará en qué grado de ella se siguen resultados que concuerdan con los obtenidos durante los experimentos. Antes que nada, es oportuno mencionar que la fórmula de Rayleigh-Jeans

$$\rho_\omega d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT d\omega \tag{3.26}$$

satisface la ley termodinámica de Wien

$$\rho_\omega d\omega = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega \tag{3.27}$$

ya que se puede escribir de la forma

$$\rho_\omega d\omega = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} k \frac{T}{\omega} d\omega$$

A pesar de esto, la fórmula de Rayleigh-Jeans conlleva al absurdo evidente. Ahora, se calculará con ayuda de (3.26) la densidad integral de radiación u:

$$u = \int_0^\infty \rho_\omega d\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega = \infty$$

Esto significa que el equilibrio entre los cuerpos materiales y la radiación puede acontecer sólo con una densidad infinita de radiación; dicho de otro modo, los osciladores del cuerpo radiante deberán emitir energía hasta que su temperatura llegue al cero absoluto.

En párrafos anteriores se indicó que precisamente dicho resultado debe obtenerse si se supone la aplicabilidad de la mecánica clásica en los sistemas microscópicos radiantes. Sin embargo, este resultado contradice severamente al experimento, el cual muestra que el equilibrio entre la radiación y los cuerpos materiales es posible a cualquier temperatura. Además, en tal equilibrio, por el contrario, la densidad de la energía de radiación es muy pequeña en comparación con la densidad de la energía contenida en los cuerpos materiales.

A pesar de todo, resulta interesante comparar la fórmula de Rayleigh-Jeans con los resultados del experimento. Con este fin, es más cómodo utilizarlo en la forma (3.24) o (3.25) donde se da la distribución en longitudes de onda. En la figura 3.9*a* se muestran las curvas experimentales de distribución de la energía en el espectro del cuerpo absolutamente negro a distintas temperaturas. Obsérvese que todas las curvas poseen un máximo y bruscamente decrecen hacia la región de longitudes de onda corta.

Por el contrario, la fórmula de Rayleigh-Jeans da un crecimiento monótono, además de rápido (λ^{-4}), hacia la región de onda corta. Sin embargo, para la región de ondas largas o para altas temperaturas concuerda bien con el experimento. Esto se muestra esquemáticamente en la figura 3.9*b*.

Debido a que la fórmula de Rayleigh-Jeans se apoya en la física clásica con-

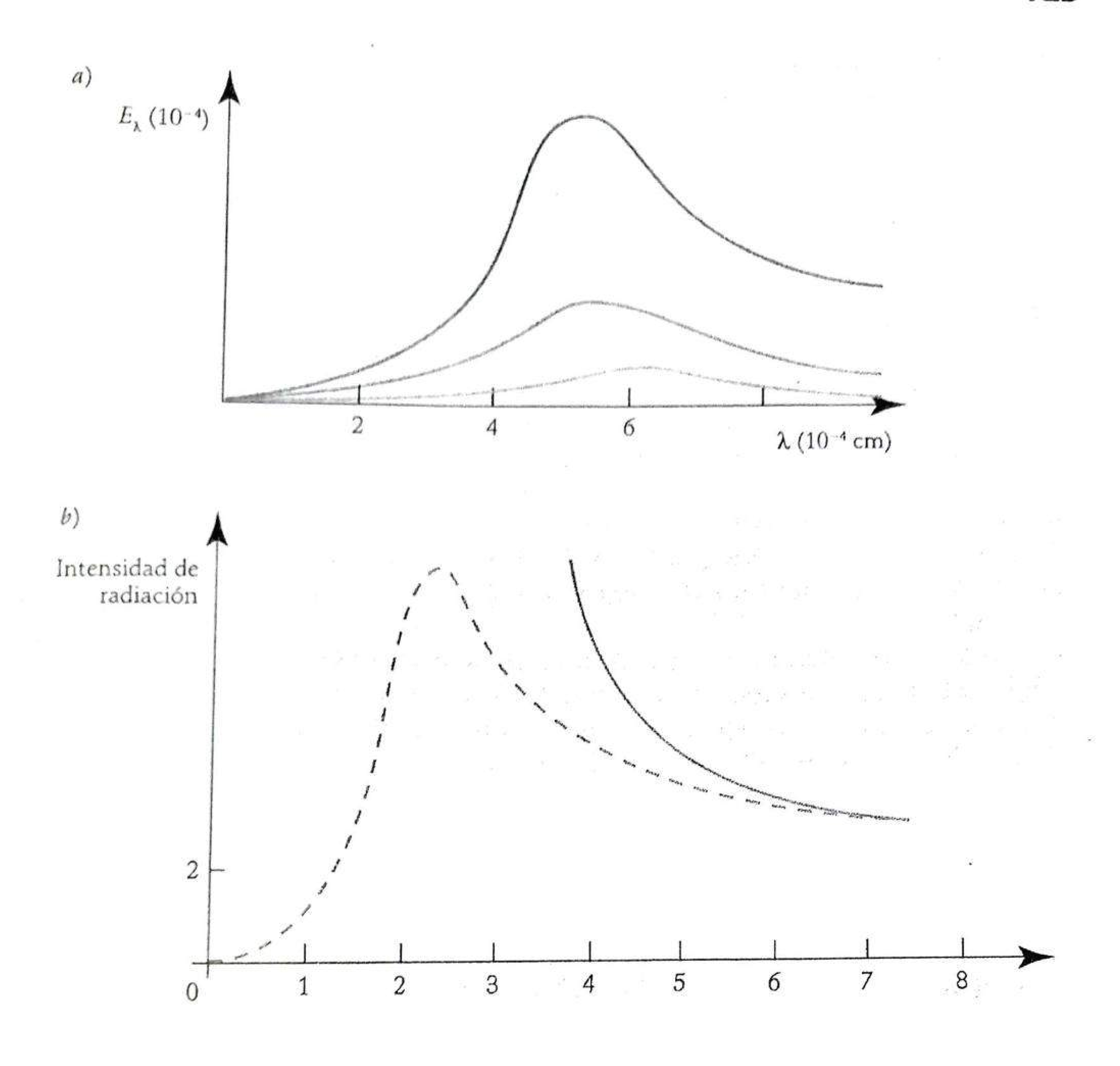


Figura 3.9. Comparación de la curva experimental de distribución de la energía en el espectro (línea punteada) con la curva obtenida de acuerdo con la fórmula de Rayleigh-Jeans (línea continua).

lleva, en fuerte contradicción con el experimento, a la conclusión de que en el espectro de la radiación térmica una gran parte de la energía corresponde a la región de onda corta del espectro, esta situación fue llamada por uno de los fundadores de la teoría cuántica, P. S. Ehrenfest, **catástrofe ultravioleta**.

Así las cosas, es de señalar que en la teoría de la radiación térmica, la teoría clásica sufrió una seria derrota.

3.8. FÓRMULA DE PLANCK

La fórmula de Rayleigh-Jeans está basada, como ya se ha visto, en las leyes más generales de la física clásica y no exige para su obtención ninguna hipótesis en especial. En 1896, Wien propuso otra fórmula que concordaba bien con los resulta-

dos experimentales, precisamente en aquella región del espectro en que la fórmula de Rayleigh-Jeans no es aplicable. Dicha fórmula escrita para I_λ es:

$$I_\lambda = C_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}, \tag{3.28}$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Para la obtención de esta fórmula, Wien debió elaborar algunas hipótesis sobre el mecanismo de emisión de la radiación de acuerdo con las cuales, la distribución en frecuencias de esta última debe ser análoga a la distribución maxwelliana de las velocidades de las moléculas de un gas.

A diferencia de la fórmula de Rayleigh-Jeans, la de Wien proporcionó el máximo en la curva de distribución de la energía en el espectro.

Sin embargo, esta fórmula resultó aplicable sólo en la región de onda corta de la curva de distribución espectral de la energía para el cuerpo absolutamente negro.

De esta manera, hacia fines del siglo XIX existían dos fórmulas que explicaban la curva de distribución espectral de la energía para diferentes regiones del espectro en correspondencia con el experimento, pero ninguna de las dos podía describir toda la curva experimental.

Hacia 1900, Planck logró encontrar por vez primera y de manera empírica, la fórmula que concordaba bien con los datos experimentales y que en los casos límite de ondas largas y cortas, se reduce correspondientemente a la fórmula de Rayleigh-Jeans y a la fórmula de Wien. La **fórmula de Planck para I_λ** es:

$$I_\lambda = \frac{C_1}{\lambda^5\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)} \tag{3.29}$$

Como se observa, esta fórmula representa en sí el resultado de la interpolación de las fórmulas de Rayleigh-Jeans y de Wien. En realidad, para $\lambda T >> 1$ (ondas largas o altas temperaturas) puede desarrollarse en serie el elemento exponencial de la fórmula de Planck, que se limita sólo a los primeros dos términos del desarrollo:

$$e^{\frac{C_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{C_2}{\lambda T} + \cdots$$

En este caso, la fórmula de Planck se transforma en:

$$I_\lambda = \frac{C_1}{C_2 \lambda^4} T,$$

lo cual coincide evidentemente con la fórmula de Rayleigh-Jeans:

$$I_\lambda = \frac{CkT}{\lambda^4}$$

Al contrario, para el caso de $\lambda T << 1$ (ondas cortas o bajas temperaturas), $\frac{C_2}{\lambda T} >> 1$ y en el denominador de la fórmula de Planck se puede ignorar la unidad

en comparación con el término exponencial. Con esto, la fórmula de Planck indica directamente que:

$$I_\lambda = C_1 e^{-\frac{C_2}{\lambda T}} \lambda^{-5};$$

es decir, se transforma en la fórmula de Wien (3.28).

Para observar el grado de correspondencia de la fórmula de Planck con los datos experimentales, puede analizarse la figura 3.10, en cuyo eje de ordenadas han sido colocadas las desviaciones en porcentajes. Con círculos y crucecitas han sido colocados los resultados experimentales.

En esta misma figura las líneas continuas fueron trazadas con ayuda de las fórmulas de Wien y de Rayleigh-Jeans, y en ellas se observa claramente su carácter asintótico.

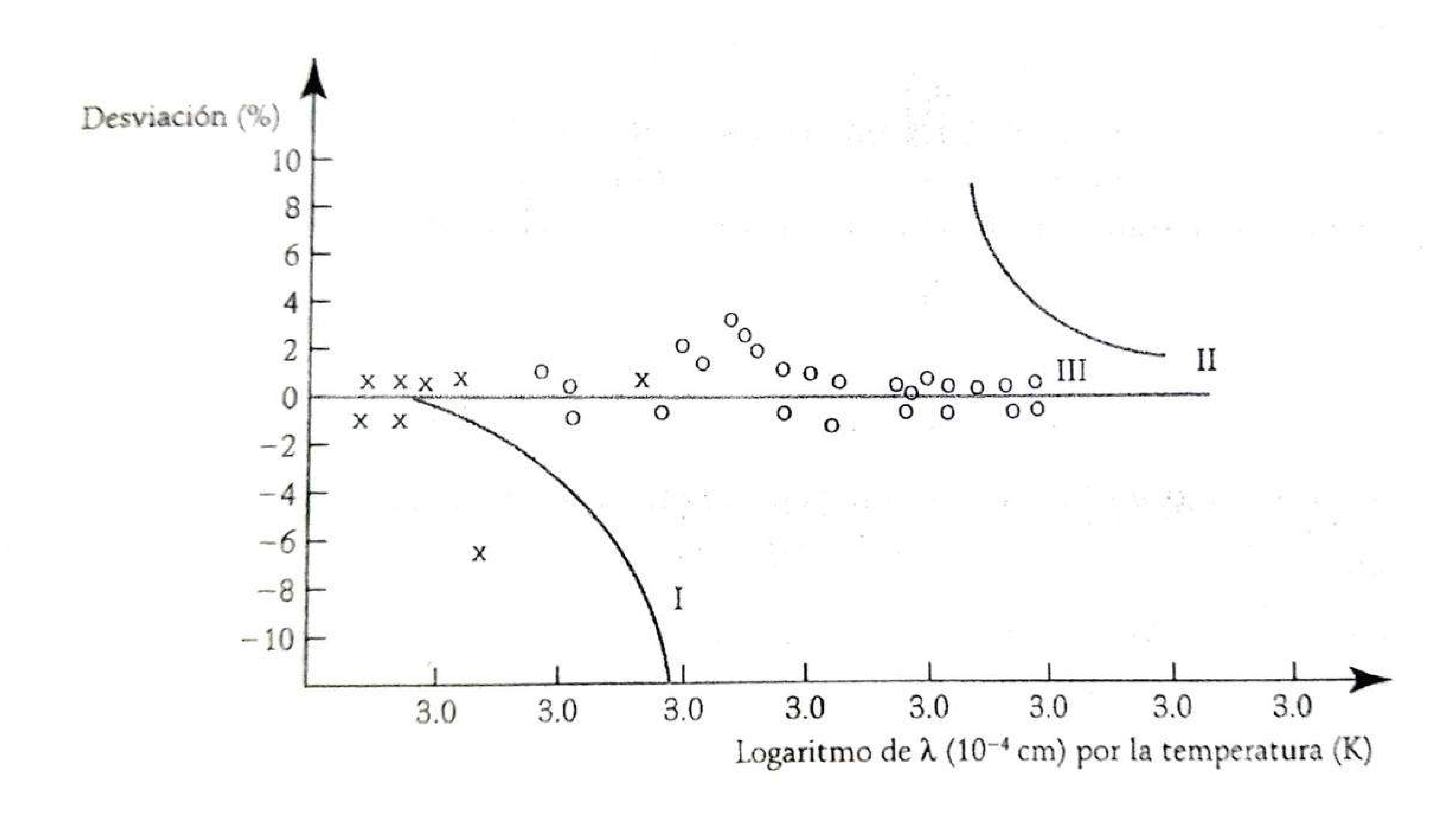


Figura 3.10. I. Ley de Wien, II. Ley de Rayleigh-Jeans, III. Ley de Planck.

3.9. HIPÓTESIS SOBRE LOS CUANTOS DE ENERGÍA

La fórmula de Planck, como ya se mostró antes, resolvió el problema de la búsqueda de la expresión matemática de la ley de distribución de la energía en el espectro del cuerpo absolutamente negro.

Sin embargo, resultó que para la obtención de esta fórmula fue necesario elaborar una hipótesis que contradice resueltamente todo el sistema de concepciones de la física clásica; precisamente, la hipótesis de que *la energía de los sistemas microscópicos, átomos y moléculas, etc., puede tomar sólo valores determinados, discretos.*

Para la obtención de su fórmula, Planck consideró a los centros materiales de radiación como osciladores lineales armónicos que portan la carga eléctrica mediante la cual dichos osciladores lineales pueden intercambiar energía con el campo electromagnético circundante. Esta **hipótesis de Planck** enunciada en términos más actuales es: *los osciladores pueden encontrarse sólo en determinados estados elegidos, en los cuales su energía es un número múltiplo de la cantidad mínima* ε_0: ε_0, $2\varepsilon_0$, ... $n\varepsilon_0$; *además, durante la emisión o absorción, los osciladores saltan de uno de estos estados a otro, ignorando los estados intermedios.*

Con ayuda de esta hipótesis, Planck obtuvo la fórmula para la densidad espectral volumétrica de radiación ρ_ω:

$$\rho_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\varepsilon_0}{\left(e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1\right)} \tag{3.30}$$

Pero cualquier fórmula que aspire a ser correcta, debe satisfacer la ley termodinámica de Wien:

$$\rho_\omega = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) \tag{3.31}$$

Ahora bien, para que la fórmula (3.30) cumpla con esta ley, es necesario colocar

$$\varepsilon_0 = \hbar\omega = h\mathrm{f} \tag{3.32}$$

donde ω es la frecuencia cíclica (o angular) de las oscilaciones, la cual puede expresarse como $\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$ según (2.3), y f es la frecuencia lineal relacionada con ω mediate la relación $\mathrm{f} = \frac{\omega}{2\pi}$.

El coeficiente de proporcionalidad h es una constante universal que posee las unidades del producto de energía por tiempo. La magnitud mecánica que contiene tal dimensión se denomina *acción*. Cabe señalar que idénticas unidades posee también el momentum angular.

La constante $\hbar$ se relaciona con h mediante la identidad

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

La constante h es denominada *constante de Planck*. La constante universal $\hbar$, llamada constante reducida de Planck desempeña un papel preponderante en la física moderna. Su valor puede ser determinado experimentalmente por una gran variedad de métodos.

En particular, las leyes de la radiación del cuerpo absolutamente negro proporcionan el siguiente valor:

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-27}\,\mathrm{erg} \cdot \mathrm{s}$$

Al sustituir (3.32) en (3.30), se tiene que:

$$\rho_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{3.33}$$

Esta última es la **fórmula de Planck**, tal como se utiliza a menudo en física teórica. Para frecuencias lineales, la misma adquiere la forma:

$$\rho_f = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \tag{3.34}$$

Desde (3.34) se sigue la expresión para el brillo superficial espectral de radiación $I_\omega = \frac{c}{8\pi}\rho_\omega$:

$$I_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{3.35}$$

Para pasar desde esta última fórmula a la distribución en longitudes de onda λ, la cual, como ya se ha dicho, es muy utilizada en la práctica, hay que aplicar las siguientes relaciones:

$$I_\omega d\omega = I_\lambda d\lambda; \quad |d\omega| = 2\pi c \lambda^{-2} d\lambda$$

Con esto último, la fórmula (3.35) se transforma en:

$$I_\lambda d\lambda = \frac{2\pi\hbar c^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{k\lambda T}} - 1} \tag{3.36}$$

Al tomar la notación

$$2\pi\hbar c^2 = C_1; \quad \frac{2\pi\hbar c}{k} = C_2,$$

se reduce la fórmula (3.36) a la forma:

$$I_\lambda d\lambda = C_1 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} d\lambda \tag{3.37}$$

la cual coincide con la fórmula (3.29).

Cabe señalar que precisamente la pequeñez extrema de la magnitud de $\hbar$ es la causa de que la no continuidad de los fenómenos atómicos no se refleje en los procesos macroscópicos. Para el caso, cuando $\hbar\omega << kT$, es decir, para bajas frecuencias o altas temperaturas, se tiene aproximadamente lo siguiente:

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$$

y la fórmula de Planck adquiere la forma $\rho_\omega = \frac{kT\omega^2}{\pi^2 c^3}$; esto es, proporciona la fórmula de Rayleigh Jeans. Para altas frecuencias o bajas temperaturas, $\hbar\omega >> kT$, la expresión (3.33) conlleva a la fórmula de Wien para ρ_ω,

$$\rho_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \tag{3.38}$$

Finalmente, puede señalarse que la densidad integral de radiación se obtiene con un valor finito si ρ_ω es tomada desde la fórmula de Planck:

$$u = \int_0^\infty \rho_\omega d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega = \frac{k^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \tag{3.39}$$

En esta última expresión se realizó el cambio de la variable de integración $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$. Esta integral es igual a $\frac{\pi^4}{15}$ según el método de la función-Z de Riemann. De esta manera, se obtiene un valor finito para u y, por consiguiente, también el de la constante de la ley de Stefan-Boltzmann σ en términos de constantes universales:

$$u = \sigma T^4 = \frac{T^4 \pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3}$$

Así, la fórmula de Planck elimina la *catástrofe ultravioleta*. No es difícil entender la causa de ello, pues, como ya se indicó antes, la divergencia de la integral

$$\int_0^\infty \rho_\omega d\omega,$$

para el caso cuando ρ_ω es tomada desde la fórmula de Rayleigh-Jeans, se debe a que esta última se basa en el teorema de equipartición de la energía, según el cual, a cada grado de libertad le corresponde una misma energía media:

$$\bar{\varepsilon} = kT$$

Al comparar las fórmulas de Rayleigh-Jeans y de Planck para ρ_ω,

$$\rho_\omega = \frac{kT\omega^2}{\pi^2 c^3},$$

$$\rho_\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\left(\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\right) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\left(\frac{\hbar\omega\omega^2}{\pi^2 c^3}\right),$$

se obtiene que, de acuerdo con la sección 3.6. "Fórmula de Rayleigh-Jeans", $\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$ es el número de grados de libertad de la radiación con frecuencias en el intervalo $\omega, \omega + d\omega$. Entonces, de la veracidad de la fórmula de Planck se sigue que la energía media correspondiente a cada grado de libertad no es la misma para las ondas estacionarias de diferentes frecuencias. Precisamente, desde la fórmula de Planck se sigue que:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \qquad (3.40)$$

Se observa así que en este caso $\bar{\varepsilon}$ decrece rápidamente con el crecimiento de ω, lo cual explica la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \rho_\omega d\omega$$

Conviene observar que la aceptación de la fórmula (3.40) para la energía media correspondiente a un grado de libertad, elimina también las serias dificultades en la teoría clásica de la capacidad térmica, como así lo mostró Einstein [4].

De los hechos señalados se desprende que el establecimiento de la fórmula de Planck significó una profunda ruptura con la física clásica, debido a que dicha fórmula contradice el teorema de la equipartición de la energía. Pero este teorema es consecuencia irremisible de la mecánica estadística basada en la mecánica clásica en su forma hamiltoniana.

De esta manera, el año de 1900, cuando por primera vez se formuló la hipótesis de los cuantos de energía, fue no sólo el primer año de un nuevo siglo, sino que significó también el comienzo de una nueva era en el desarrollo de la física teórica.

Ejemplo 3.9.1

Escribir la fórmula de Planck (3.33) para una distribución de longitudes de onda.
Solución. Desde (3.33) se tiene que

$$\rho_\omega d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

es una distribución en frecuencias ω. Por eso, al sustituir las expresiones

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \ \|d\omega\| = 2\pi c \frac{d\lambda}{\lambda^2},$$

se tiene que

$$\rho_\omega d\omega = \frac{\hbar(2\pi c)^3}{\lambda^3 \pi^2 c^3} 2\pi c \frac{d\lambda}{\lambda^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{16\pi^2 c\hbar}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}} - 1} \equiv \rho_\lambda d\lambda$$

Así,

$$\rho_\lambda d\lambda = \frac{16\pi^2 c\hbar}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}} - 1}$$

Ejercicio 3.9.1

Escribir la fórmula de Planck (3.33) para una distribución de frecuencias lineales.
Solución.

$$\rho_f df = \frac{16\hbar\pi^2 f^3}{c^3}\frac{df}{e^{\frac{2\pi\hbar f}{kT}} - 1}$$

3.10. LEY DE STEFAN-BOLTZMANN

En el siglo XIX fueron realizados muchísimos estudios sobre la dependencia de la capacidad emitiva integral de los cuerpos calentados respecto de la temperatura; es decir, de la magnitud que determina la energía total de todas las longitudes de onda emitidas por los cuerpos. Estos estudios condujeron a resultados contradictorios. La causa principal de la divergencia fue finalmente esclarecida después del establecimiento de la ley de Kirchhoff, ya que la radiación está determinada no sólo por la temperatura, sino también por la composición del cuerpo y las propiedades físicas de la superficie radiante.

De las leyes establecidas empíricamente, aún se cita el resultado encontrado en 1879 por Stefan (1835-1898). Él encontró que para los cuerpos negros, la capacidad de emitancia es proporcional a la temperatura con exponente cuatro. Cinco años después, Boltzmann obtuvo teóricamente este resultado desde razonamientos termodinámicos y demostró que es absolutamente justo para los cuerpos absolutamente negros. Este resultado, que recibió luego el nombre de ley de Stefan-Boltzmann, fue confirmado posteriormente en los experimentos con la radiación del cuerpo absolutamente negro.

La conclusión de Boltzmann y todos los trabajos posteriores en la teoría de la radiación térmica, utilizan esencialmente los resultados de Maxwell, quien predijo y calculó la *presión de la luz*. Para una radiación isotrópica esta presión P es igual a

$$P = \frac{u}{3},$$

donde u es la densidad integral de la energía luminosa. A dicho resultado debe conllevar cualquier *teoría relativista de la luz*, independientemente de si ella es corpuscular u ondulatoria. Antes de que la teoría relativista fuese enunciada, esta posición no era conocida y los resultados de Maxwell eran vistos con muchas reservas. En particular, de acuerdo con la teoría corpuscular no relativista, debía ser que:

$$P = \frac{2}{3}u,$$

como lo predice la teoría cinética de los gases. Por eso, los experimentos de P. N. Lébediev, quien obtuvo experimentalmente por primera vez en 1900 la presión luminosa para confirmar así los resultados de Maxwell, tuvieron un valor fundamental para toda la termodinámica de la energía luminosa.

Enseguida será mostrada con ayuda del "método de los ciclos", la obtención de la ley de Stefan-Boltzmann.

Supóngase que la radiación es isotrópica y de composición espectral arbitraria; y además, que ésta se incluye en una nube adiabática con paredes reflectoras ideales. Analícese en ella un proceso adiabático cuasiestático durante el cual el volumen V limitado por la nube, cambia con lentitud infinita. Para asegurarse de que durante este proceso la radiación permanezca isotrópica todo el tiempo, puede tomarse una nube de forma esférica. La energía interna de la radiación en la nube es igual a uV. Con el aumento del volumen de la nube en dV, a cuenta de esta energía se realiza un trabajo igual a PdV, de tal manera que:

$$PdV = -Vdu$$

Debido a que para la radiación isotrópica $P = \frac{1}{3}u$, entonces a esta ecuación puede dársele la forma

$$\frac{4udV}{3} + Vdu = 0$$

De aquí se sigue que durante el proceso,

$$u\sqrt[3]{V^4} = \text{const.} \tag{3.41}$$

o

$$P\sqrt[3]{V^4} = \text{const.} \tag{3.42}$$

Esta es la ecuación de la adiabata para la radiación isotrópica, análoga a la adiabática de Poisson para un gas ideal. La constante de la adiabata es $\gamma = \frac{4}{3}$.

Debido al efecto Doppler durante la expansión o comprensión adiabática de la radiación, debe cambiar su composición espectral.

Supongamos que la radiación isotrópica ocupa el intervalo espectral ω, $\omega + d\omega$. Como resultado de la reflexión en la pared en movimiento, la frecuencia ω y el ancho del intervalo $d\omega$ cambian y se hacen iguales a ω' y $d\omega'$. Durante esto, se satisface la relación

$$u_\omega d\omega\sqrt[3]{V^4} = u'_\omega d\omega'\sqrt[3]{V'^4} = \text{const.} \tag{3.43}$$

donde V' y u' son el volumen y la densidad espectral de la radiación con frecuencia ω' al final del proceso.

Realícese ahora en la radiación negra el *ciclo de Carnot*. Supóngase que la ra-

diación está incluida en un cilindro cuyas paredes laterales junto con el émbolo son reflectores ideales, mientras que en el fondo es negro y puede llevarse al contacto térmico con un calentador cuya temperatura es T_1 y un enfriador cuya temperatura es T_2. Se puede aislar adiabáticamente la radiación con ayuda de un pasador reflector ideal, el cual es introducido por un lado para cubrir (proteger) el fondo negro del cilindro.

En ausencia del pasador, cuando el fondo negro del cilindro ha sido llevado al contacto térmico con el calentador o enfriador, la radiación en el cilindro será de equilibrio.

En la isoterma 1-2 (fig. 3.11) el fondo del cilindro hace contacto con el calentador.

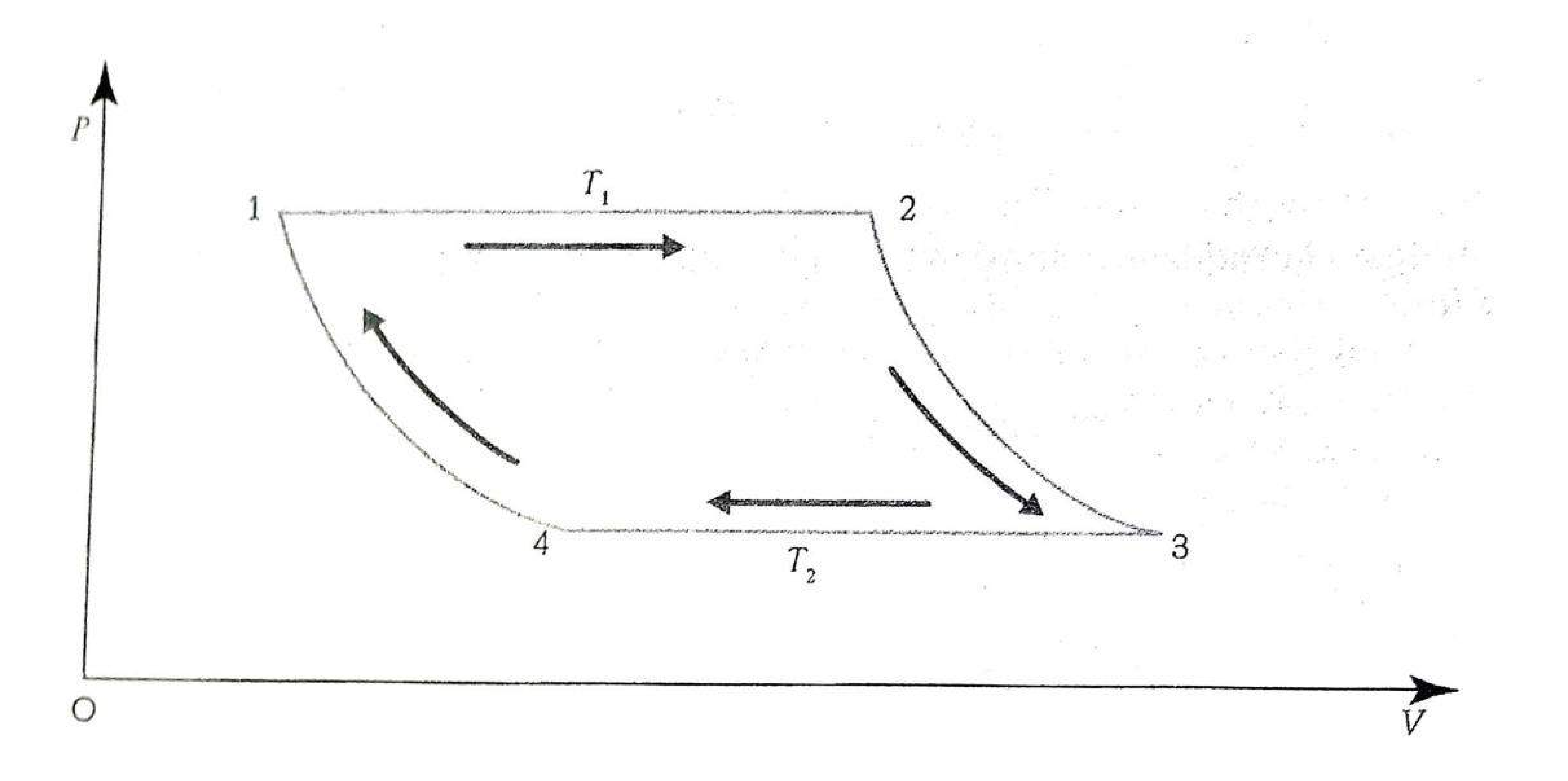


Figura 3.11. Ciclo de Carnot. Diagrama presión-volumen.

La cantidad de calor trasmitida por el calentador en esta isoterma es igual a:

$$Q_1 = u_1(V_2 - V_1) + P_1(V_2 - V_1) = \frac{4}{3}u_1(V_2 - V_1)$$

La cantidad de calor cedida al enfriador en la isoterma 3-4 es:

$$Q_2 = \frac{4}{3}u_2(V_3 - V_4)$$

Por el teorema de Carnot,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{u_1(V_2 - V_1)}{u_2(V_3 - V_4)} = \frac{T_1}{T_2}$$

En las adiabatas 2-3 y 4-1 con base en (3.41) se cumplen las relaciones:

$$\sqrt[4]{u_1^3}V_2 = \sqrt[4]{u_2^3}V_3, \quad \sqrt[4]{u_1^3}V_1 = \sqrt[4]{u_2^3}V_4$$

Se sigue entonces que:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_4} = \sqrt[4]{\frac{u_2^3}{u_1^3}}$$

y por eso,

$$\frac{u_1}{T_1^4} = \frac{u_2}{T_2^4} = \text{const.}$$

Por consiguiente,

$$u = \sigma T^4 \tag{3.44}$$

donde σ es una constante universal. De esta manera, se ha obtenido la **ley de Stefan-Boltzmann** por métodos termodinámicos. Este último resultado también puede obtenerse de manera más directa si se aplica a la radiación en equilibrio la fórmula termodinámica general:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

Luego de sustituir en esta fórmula las relaciones $u = Vu(T)$, $P = \frac{1}{3}u(T)$, se llega a una ecuación diferencial cuya solución es (3.44).

PROBLEMAS

1. Un calentador eléctrico utiliza una potencia de $P = 500$ W. La temperatura de su superficie interior, medida a través de un orificio de diámetro $d = 5 \times 10^{-2}$ m, es de 973 K. ¿Qué parte de la potencia utilizada es disipada por las paredes?

   - **Guía.** Una vez que el calentador alcanza su temperatura de trabajo, toda la energía que éste utiliza por segundo (es decir, potencia), P es emitida al exterior por el orificio y las paredes. Por eso, $P = \Phi_e' + \Phi_e''$ (a), donde Φ_e' y Φ'' son los flujos de radiación emitidos por el orificio y las paredes correspondientemente. En el ejercicio se pide encontrar la relación $\alpha = \frac{\Phi''}{P}$; por eso, considerando (a) se tiene $\alpha = 1 - \frac{\Phi_e'}{P}$ (b). Considerando que la radiación a través del orificio es de cuerpo absolutamente negro, entonces desde la relación para la luminosidad energética de un cuerpo $R_e = \frac{\Phi_e}{S}$ de superficie S y de la correspondiente ley de Stefan-Boltzmann $R_e = \sigma T^4$ se encuentra Φ_e', la cual, al sustituirse en (b), arroja lo siguiente $\alpha = 1 - (\pi d^2/4)\sigma T^4/P = 0.8$:

2. Un hilo de wolframio es calentado en el vacío por una corriente $I_1 = 1.00$ Å hasta una temperatura $T_1 = 1000$ K. ¿Para qué valores de la corriente el hilo se calentará hasta una temperatura $T_2 = 3000$ K. El coeficiente de radiación del wolframio y su resistencia específica, correspondientes a las temperaturas T_1 y T_2, son:

$$a_{T_1} = 0.115, \quad a_{T_2} = 0.334, \quad \rho_1 = 25.7\times10^{-8}\Omega\text{m}, \quad \rho_2 = 96.2\times10^{-8}\Omega m$$

- **Guía.** Cuando se establece la temperatura de trabajo, se tiene que $P = \Phi_e$ (a), donde P es la potencia usada por el hilo de wolframio y Φ_e es el flujo de radiación emitida por el hilo. Conforme al electromagnetismo se sabe que la potencia emitida por un conductor con corriente I y resistencia óhmica R, es $P = I^2\frac{\rho l}{s}$ (b), donde ρ es la resistencia específica del hilo, l su longitud y S su sección transversal. Para encontrar Φ_e, hay que considerar que la radiación del wolframio es muy distinta de la de un cuerpo absolutamente negro calentado a la misma temperatura. Por eso, desde $R_e = \frac{\Phi_e}{S}$ y la ley de Stefan-Boltzmann para cuerpos no negros $R_e = a_T\sigma T^4$ se encuentra Φ_e, y al sustituir luego este resultado en (a) y (b), se tiene $I^2\rho l = a_T\sigma T^4 S^2$. Si se escribe este resultado para la temperatura T_1 y luego para T_2, al dividir una expresión entre la otra, se obtiene $I_2 = I_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\sqrt{\frac{a_{T_2}\rho_1}{a_{T_1}\rho_2}} = 7.9$ Å.

3. En el espectro del Sol, el máximo de la densidad espectral corresponde a la longitud de onda $\lambda_0 = 0.47\times6^{-6}$ m. Si se acepta que el Sol emite como cuerpo absolutamente negro, encontrar la intensidad de la radiación solar (es decir, la densidad de flujo de radiación) en los límites de la atmósfera terrestre.

- **Guía.** De acuerdo con la definición en el planteamiento del problema, la intensidad de flujo de radiación, también denominada intensidad de radiación, puede escribirse como $I = \frac{E_e}{St} = \frac{\Phi_e}{S}$ (a), donde E_e es la energía de radiación y $\Phi_e = \frac{E_e}{t}$ es el flujo de radiación a través de la superficie S. Por otro lado, la luminosidad energética R_e está dada por la expresión $R_e = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{1}{S}\frac{dE_e}{dt}$. Desde esto último y (a) se observa que las cantidades I y R_e poseen las mismas unidades. La intensidad de radiación del Sol en las cercanías de la Tierra debe ser proporcional a la luminosidad R_e de la superficie del Sol. Para encontrar la relación entre I y R_e, consideremos que el flujo total de radiación emitido por la superficie solar pasa a través de la superficie de una esfera de radio r igual a la distancia del Sol a la Tierra: $\Phi_e = R_e 4\pi r_0^2 = I 4\pi r^2$, donde r_0 es el radio del Sol. Así pues, $I = \frac{R_e r_0^2}{r^2}$ (b). Por otro lado, a partir de la ley de Stefan-Boltzmann $R_e = \sigma T^4$ (c) y de la ley de desplazamiento de Wien $\lambda_0 = \frac{b}{T}(d)$ se encuentra la expresión para R_e y cuya sustitución en (b) arroja el resultado siguiente: $I = \sigma\left(\frac{b}{\lambda}\right)^4\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = 1.8\times10^3$ W/m^2, donde se consideraron los valores siguientes: $r_0 = 6.95\times10^8$m, $r = 1.50\times10^{11}$m.

NOTA: Las mediciones arrojan el resultado $I = 1.4\times10^3$ W/m^2. La inexactitud del resultado obtenido tiene su explicación en que la radiación solar se distingue de la radiación del cuerpo absolutamente negro. Por eso, las expresiones (c) y (d) en este caso resultan aproximadas.

4. Utilizando el resultado del ejercicio anterior, determinar la temperatura alcanzada por una placa delgada colocada en los límites de la atmósfera terrestre, perpendicular a los rayos solares. Tomar en cuenta que la temperatura de la placa es uniforme en todos los puntos. Considerar los dos casos cuando la placa es un cuerpo (a) absolutamente negro y (b) gris. $\left[\text{(a) } T = \sqrt[4]{\frac{I}{2\sigma}} = 3.3 \times 10^2 \text{ K, (b) } T = \sqrt[4]{\frac{I}{2\sigma}} = 3.3 \times 10^2 \text{ K} \right]$

5. Partiendo de las definiciones para la densidad espectral de luminosidad energética $r_{fT} = \frac{dR_e}{df}$, donde $R_e = \int_0^\infty r_{fT} df$, y de la densidad espectral $r_{\lambda T} = \frac{dR_e}{d\lambda}$, encontrar la relación entre las cantidades r_{fT} y $r_{\lambda T}$ que caracterizan la densidad espectral (de la luminosidad) de un cuerpo. Escriba la fórmula de Planck para la cantidad $r_{\lambda T}$. $\left(r_{\lambda T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \right)$

6. Determinar con ayuda de la fórmula de Planck la luminosidad ΔR_e de un cuerpo absolutamente negro para un estrecho intervalo de longitudes de onda $\Delta\lambda = 10$ Å, correspondiente a un máximo de densidad espectral para una temperatura $T = 3000$ K. ($\Delta R_e = 3.2 \times 10^3$ W/m^2)

7. Entre una fuente puntual de luz monocromática ($\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m) y una pantalla se ha colocado un diafragma con un orificio circular de radio $r_1 = 75 \times 10^{-5}$ m. La distancia R desde la fuente al diafragma es la misma (r_0) que hay desde el diafragma a la pantalla: $R = r_0 = 0.75$ m. ¿Aumentará o disminuirá la iluminación de la pantalla en el punto P que yace frente al centro del orificio, si el radio de éste es aumentado hasta $r_2 = 87 \times 10^{-5}$ m? (la iluminación disminuye).

8. Las longitudes de onda λ_{01} y λ_{02} correspondientes a los máximos de la densidad espectral de iluminación en los espectros de los cuerpos absolutamente negros, se distinguen en $\Delta\lambda = \lambda_{02} - \lambda_{01} = 5 \times 10^{-7}$ m. Determinar la temperatura T_2 del segundo cuerpo, si la temperatura del primero es $T_1 = 2.50 \times 10^3$ K. $\left(T_2 = \frac{bT_1}{b + T_1 \Delta\lambda} = 1.75 \times 10^3 \text{ K} \right)$

9. Un hilo de wolframio de diámetro $d_1 = 10^{-4}$ m está unido en serie con otro hilo del mismo material y de diámetro desconocido. Los hilos son calculados en el vacío por cierta corriente hasta una temperatura de $T_1 = 2.00 \times 10^3$ K y $T_2 = 3.00 \times 10^3$ K correspondientemente. Encontrar el diámetro d_2 del segundo hilo. Los coeficientes de radiación total del wolframio y sus resistencias específicas correspondientes a las temperaturas dadas son: $a_1 = 0.260$, $a_2 = 0.334$, $\rho_1 = 5.91 \times 10^{-7} \Omega$m, $\rho_2 = 9.62 \times 10^{-7} \Omega$m. $\left(d_2 = d_1 \sqrt[3]{\frac{a_1 \rho_2 T_1^4}{a_2 \rho_1 T_2^4}} = 0.06 \text{ m} \right)$

10. Encontrar la longitud de onda $\lambda_{mín}$ de la frontera de onda corta del espectro continuo Roentgen, si la velocidad de los electrones dirigidos al anticátodo del tubo es $v = 0.85\ c$, donde c es la velocidad de la luz. $\lambda_{mín} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} / mc \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = 0.28 \times 10^{-11}$ m

Indicación: considere al electrón como partícula relativista y use la expresión correspondiente para la energía cinética.

11. Un haz paralelo de rayos monocromáticos ($\lambda = 0.662 \times 10^{-6}$ m) incide normalmente sobre una superficie oscura ($\rho = 0$) y produce una presión $P = 3.0 \times 10^{-7}$ Pa. Determinar la concentración n de fotones en el haz luminoso. $\left(n = \frac{P\lambda}{hc} = 1.0 \times 10^{12} \text{ m}^{-3} \right)$

12. Una onda plana luminosa de intensidad I ilumina una esfera con superficie especular de radio R ($R >> \lambda$). Considere que el coeficiente de reflexión ρ no depende del ángulo de incidencia. Determinar la fuerza de la presión luminosa que actúa sobre la esfera. $\left(F = \frac{\pi R^2 I}{c} \right)$

Indicación: considerar dos partes del flujo de fotones que interactúan con la esfera; una absorbida $(1 - \rho)$ y otra reflejada ρ. Para calcular la presión en el segundo caso utilice el resultado obtenido en el problema 11.

4

Propiedades corpusculares de las ondas

4.1. TEORÍA CLÁSICA DE LA RADIACIÓN DEL ELECTRÓN Y SUS LÍMITES

Muchos fenómenos ópticos pueden explicarse si se admite que en los átomos y moléculas están presentes partículas denominadas electrones. Éstos se encuentran en movimiento oscilatorio y radian luz de frecuencia igual a la de sus propias oscilaciones. Esta hipótesis es confirmada por la electrodinámica clásica, de cuyas deducciones resulta que todo electrón que se mueve con una aceleración $\ddot{x}$ emitirá ondas electromagnéticas cuya potencia será igual a:

$$W = \left(\frac{2e^2}{3c^3}\right)\ddot{x}^2 \qquad (4.1)$$

Cuando el electrón realiza un movimiento oscilatorio armónico de amplitud a y de frecuencia f, en torno a dicha partícula se produce una onda electromagnética esférica de la misma frecuencia.

La potencia de radiación del electrón (la media respecto del tiempo), de acuerdo con la expresión (4.1), es igual a:

$$W = \frac{16\pi^4 \mathrm{f}^4 e^2 a^2}{3c^3} \qquad (4.2)$$

Si el movimiento que realiza el electrón no es oscilatorio armónico puro, entonces éste puede ser desarrollado en serie de Fourier por sus componentes armónicas. A cada una de las componentes con amplitud a_i le corresponderá una potencia de emisión determinada por (4.2).

De hecho, el electrón nunca realiza oscilaciones armónicas puras, ya que pierde energía durante la radiación. Por esta razón, la amplitud de sus oscilaciones se amortiguará, siempre y cuando no le sea comunicada energía de alguna fuente externa.

De esta manera, un electrón que realiza oscilaciones amortiguadas emite una radiación cuya amplitud a_i se distingue sensiblemente de cero en un intervalo finito de frecuencias. Esto último significa que la luz emitida no es rigurosamente monocromática, sino que representa una banda espectral de anchura finita. La *anchura natural* δf de ésta es:

$$\delta f = \frac{\gamma}{2\pi} \tag{4.3}$$

donde $\gamma = \dfrac{8\pi^2 e^2 f^2}{3mc^3}$.

Así, puede observarse que la anchura natural depende de la carga e, de la masa m del electrón, de la velocidad de la luz c y de la frecuencia de emisión f. Para frecuencias del orden de $10^{15}\ s^{-1}$ (luz visible) esta anchura es igual a $\delta f \approx 0.0043\ s^{-1}$; es decir, es relativamente muy pequeña. Por esto, se puede considerar con suficiente aproximación que un electrón que posea una frecuencia propia f de oscilaciones armónicas en un átomo o molécula, emitirá de acuerdo con la electrodinámica clásica, luz de la misma frecuencia f.

El desarrollo integral de Fourier para el movimiento no periódico del electrón proporciona, en un caso general, una amplitud a_i diferente de cero para todas las frecuencias f_i. En este caso, la radiación se caracterizará por tener ondas de todas las longitudes posibles, es decir, por ser continuas y no de rayas.

Como ejemplo de emisión continua del electrón puede citarse **la radiación de frenado**, la cual surge cuando el movimiento del electrón es detenido bruscamente.

Al aplicar la fórmula (4.1) se obtiene que la energía emitida durante un tiempo dt por un electrón que experimenta el frenado está dada por:

$$dE = Wdt = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{x}^2 dt$$

Si se supone que Δt es el intervalo de tiempo durante el cual el electrón se frena por completo, es decir, el tiempo durante el cual su velocidad varía desde su valor inicial v hasta cero, y que el frenado se produce con desaceleración constante $\ddot{x}$, se obtendrá que la cantidad total de energía E emitida durante todo el intervalo Δt será

$$E = \int_0^{\Delta t} \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{x}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{x}^2 \Delta t$$

Ahora bien, cuando la aceleración es constante tiene lugar la correlación $\ddot{x} = \dfrac{v}{\Delta t}$, y la última expresión indica que:

$$E = \frac{2e^2 v^2}{3c^3 \Delta t} \tag{4.4}$$

Por esta última fórmula se observa que la radiación de energía será tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad inicial v del electrón y menor el tiempo de frenado Δt.

Esto significa que sólo puede esperarse una radiación sensible de energía cuando se frene bruscamente un electrón rápido. Estas condiciones tienen lugar cuando es bombardeado un anticátodo sólido con electrones rápidos, como ocurre en los tubos de rayos X (o rayos Roentgen).

El hecho de que el tiempo Δt de frenado sea muy pequeño, da lugar a que las ondas emitidas sean cortas. De esta manera se explica el origen de los rayos X.

El desarrollo integral de Fourier del movimiento retardado de un electrón muestra que el espectro emitido por dicho electrón en estas condiciones, es continuo y además, posee un máximo de energía que se encuentra en una región de longitudes de onda tanto más cortas cuanto mayor sea la velocidad inicial de los electrones. La experiencia confirma esta conclusión.

Como ejemplo de este tipo de radiación, puede citarse aquella que tiene lugar en el "betatrón" y "sincrotrón". En estos aceleradores, al moverse el electrón impulsado circularmente por un campo eléctrico rotacional, alcanza velocidades muy grandes próximas a la de la luz.

En 1944, los físicos soviéticos I. Pomeranchuk y D. Ivanenko predijeron que los electrones que se mueven circularmente en el betatrón o sincrotrón deben radiar.

Poco tiempo después, esta radiación fue observada en un sincrotrón que aceleraba los electrones hasta una energía de 7×10^7 eV.

Dicha radiación fue observada visualmente y tenía el aspecto de una pequeña mancha brillante de luz blanca cuando se miraba a través de un tubo de vacío en el plano de la órbita al encuentro del electrón.

Los ejemplos citados muestran que es posible aplicar la electrodinámica clásica en el cálculo de la radiación del electrón, cuando éste tiene un movimiento acelerado. Radian únicamente los electrones que se mueven aceleradamente; los electrones cuyo movimiento es uniforme no deben emitir energía.

Esta conclusión es verdadera sólo mientras la velocidad v del electrón que se mueve sea menor que la velocidad de fase de la luz.

La luminiscencia del electrón cuando éste se mueve con velocidades comparables a la de la luz, fue descubierta en 1934 por P. A. Cherenkov al observar a través de un líquido el paso de electrones muy rápidos producidos por los rayos gamma de elementos radiactivos. Dicha luminosidad, denominada **efecto Cherenkov**, está distribuida dentro de los límites de un cono cuyo ángulo de abertura θ puede determinarse desde la correlación

$$\cos\theta = \frac{c}{nv} \tag{4.5}$$

donde θ es el ángulo de inicio medido a partir de la dirección en que se mueve el electrón, y n el índice de refracción del medio (n = velocidad de la luz en el vacío/velocidad de la luz en el medio). La expresión (4.5) proporciona para θ valores menores que $\frac{\pi}{2}$; por consiguiente, la luminosidad puede observarse únicamente en la misma dirección en que el electrón se mueve. En la dirección opuesta no existe radiación.

4.1.1. Conclusiones

a) *El desarrollo en la integral de Fourier del movimiento retardado del electrón muestra que el espectro emitido por éste es continuo y que posee un máximo de la energía, el cual se encuentra en una región que tiende a desplazarse a la región de ondas cortas mientras más grande sea la velocidad inicial.*

b) *La radiación del electrón que tiene lugar en el betatrón y sincrotón, confirma la veracidad de los resultados de la electrodinámica clásica.*

No obstante, con el avance de la física se han ido acumulando experiencias, las cuales están en desacuerdo con la teoría clásica de la radiación y con la hipótesis sobre la naturaleza exclusivamente ondulatoria de la luz. Esto se pone de manifiesto, por ejemplo, al estudiar la distribución de la energía en longitudes de onda en el espectro del cuerpo negro.

Desde principios termodinámicos generales, puede demostrarse que la distribución de la energía en el espectro del cuerpo negro es una función universal que depende exclusivamente de la longitud de onda λ y de la temperatura absoluta T.

Sin embargo, la forma exacta de esta función pudo ser establecida por M. Planck después de asumir un criterio totalmente extraño a las concepciones clásicas, y que consistía en postular que la luz era emitida en forma de porciones aisladas (cuantos) de energía:

$$\varepsilon = \hbar\omega = h\mathrm{f} \tag{4.6}$$

donde $\omega = 2\pi\mathrm{f}$ es la frecuencia angular o cíclica y f es la frecuencia de la radiación, h es la constante ya conocida de Planck y proporcional a la constante reducida de Planck $\hbar$.

La experiencia demuestra que las curvas de distribución de la energía en el espectro continuo de los rayos X tienen un límite en la región de longitudes de onda corta (fig. 4.1).

La longitud de onda es función sólo de la velocidad de los electrones $\lambda_0 = \lambda_0(v)$ que chocan en el anticátodo, pero no del material de que se compone este último.

Al aumentar la velocidad, la longitud de onda disminuye. De acuerdo con el experimento:

$$\lambda_0 = \frac{K}{V_1 - V_2} \tag{4.7}$$

en donde al tomar las unidades de λ_0 en Å (angstroms) y $V_1 - V_2$ en volts (diferencia de potencial), el coeficiente de proporcionalidad K toma el siguiente valor numérico $K = 12\,350$.

La existencia de un límite en la región de ondas cortas del espectro continuo de los rayos X se explica satisfactoriamente con la hipótesis de Planck sobre la emisión de la energía en forma de porciones $\varepsilon = h\mathrm{f}$.

En efecto, si la radiación es debida a los electrones que se frenan, la energía emitida por el electrón no puede ser mayor que su energía cinética E_c:

$$\varepsilon = h\mathrm{f} \leq E_c$$

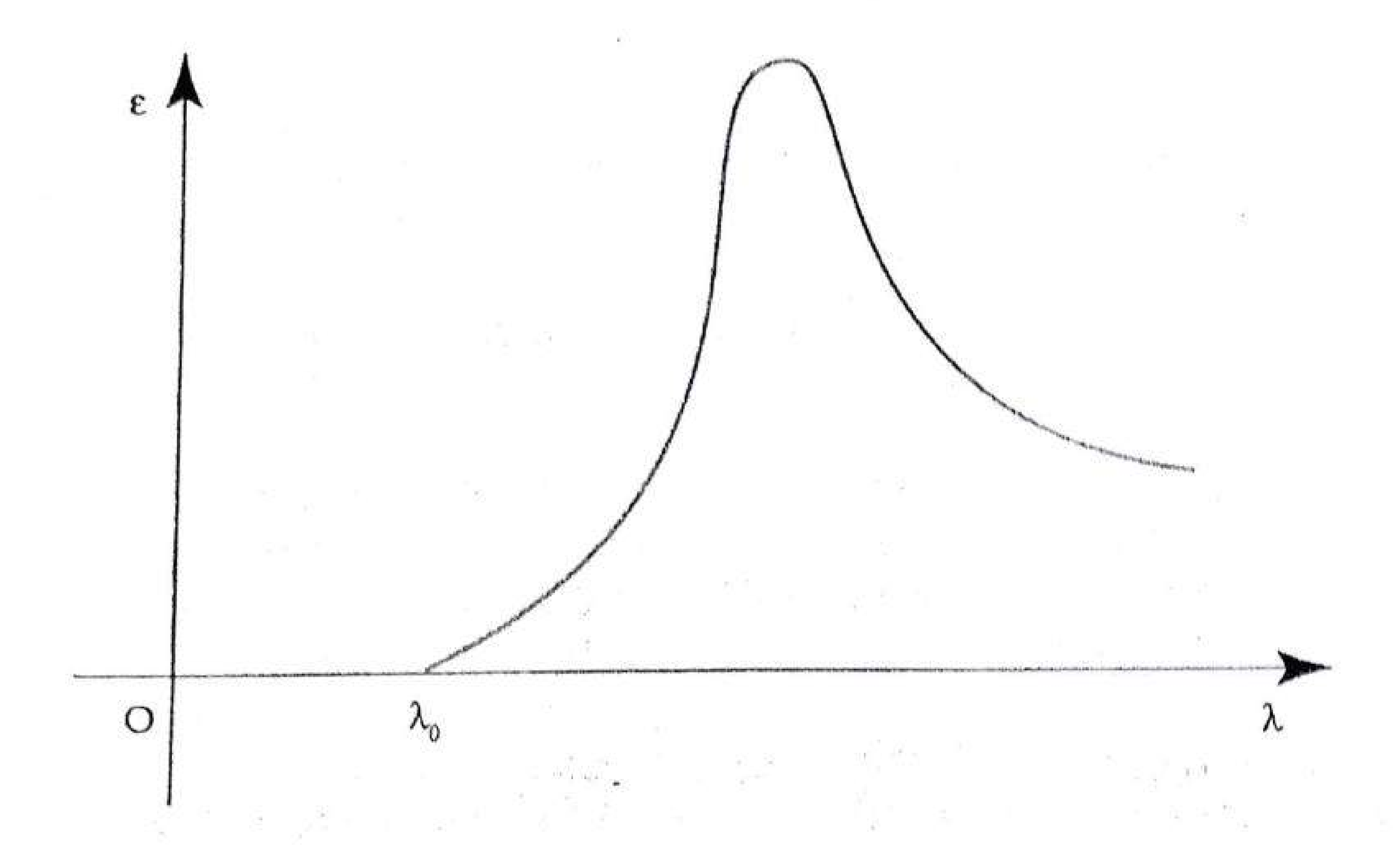


Figura 4.1. Curva de distribución de la energía en el espectro continuo de los rayos X obtenido al chocar un haz de electrones rápidos con un anticátodo de wolframio.

Sea por ejemplo, que el electrón pasa por dos puntos entre los cuales existe una diferencia de potencial $V_1 - V_2$. Por tanto, la energía cinética adquirida por el mismo es igual a

$$E_c = e(V_1 - V_2),$$

donde luego de comparar las dos últimas expresiones se obtiene que:

$$h\mathrm{f} \leq e(V_1 - V_2)$$

Por tanto,

$$\mathrm{f}_{\text{máx}} = \mathrm{f}_0 = \frac{e}{h}(V_1 - V_2),$$

es la frecuencia máxima con que puede emitir energía el electrón retardado (frenado).

Considérese la siguiente expresión:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\mathrm{f}_0} = \frac{c}{\frac{e}{h}(V_1 - V_2)} = \frac{K}{V_1 - V_2},\ K = \frac{hc}{e}$$

Se observa que coincide con la fórmula empírica

$$\lambda = \frac{K}{V_1 - V_2}$$

Debido a que h, c, e, son conocidos, entonces:

$$K = \frac{hc}{e} = 4.13 \times 10^{-7},$$

o considerando que:

$$[\lambda_0] = \text{Å};\ [V_1 - V_2] = \text{volts}$$

se sigue que:

$$K = 12\,340,$$

lo cual coincide satisfactoriamente con su valor experimental.

4.2. EFECTO FOTOELÉCTRICO

Este es uno de los efectos que muestra de manera precisa la presencia de propiedades corpusculares en las ondas y además, que la absorción de la luz se realiza en forma de porciones de manera análoga a su emisión.

La influencia que ejerce la luz en el desarrollo de los procesos eléctricos fue descrita primero por Hertz. Más adelante, se realizaron estudios sobre la influencia de la luz en los cuerpos cargados eléctricamente, por A. G. Stolietov durante el periodo de 1888-1890. De manera simultánea este efecto fue estudiado por el físico inglés Hallwachs.

De acuerdo con las observaciones de Stolietov, la lámina C cargada negativamente (fig. 4.2) pierde su carga bajo la acción de la luz. Este fenómeno, denominado *actinoeléctrico* por Stolietov, se conoce hoy día como **efecto fotoeléctrico**.

Dicho efecto posee las siguientes características:

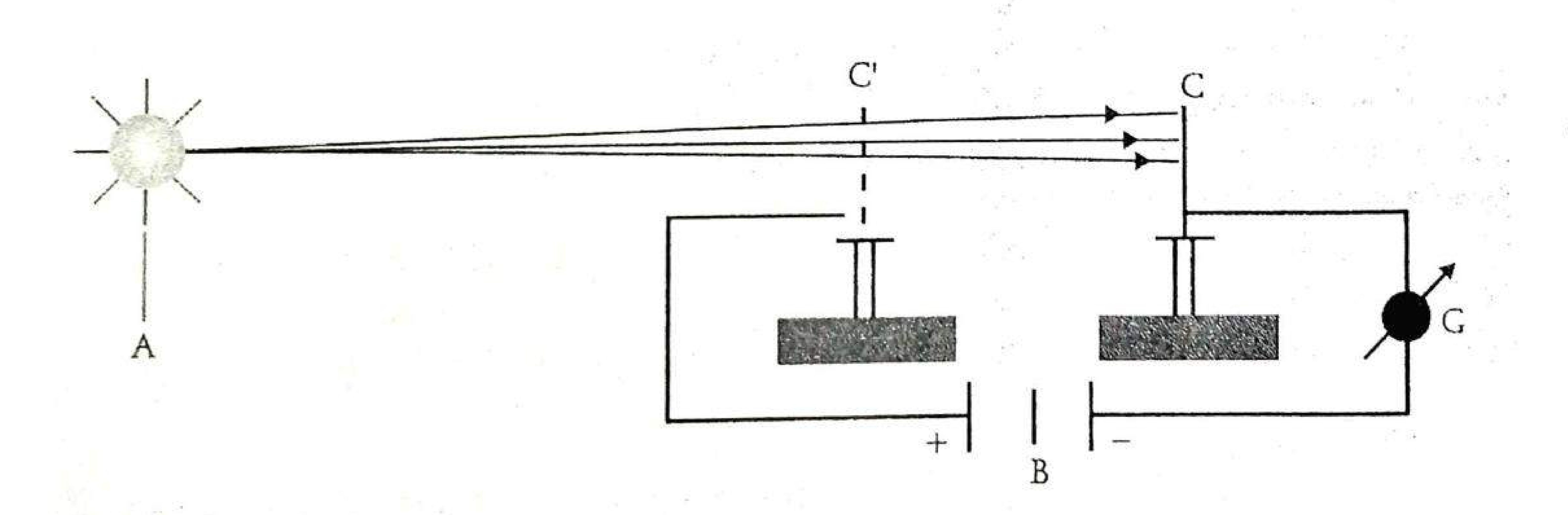


Figura 4.2. Esquema del experimento de Stolietov.

1. *El cuerpo pierde su carga únicamente cuando ésta es negativa.*
2. *El efecto fotoeléctrico es producido fundamentalmente por los rayos ultravioleta.*
3. *El efecto de la carga producido por los rayos, es proporcional a sus energías.*
4. *Este efecto se observa incluso cuando el tiempo de exposición es muy pequeño, con la particularidad de que entre el momento en que comienza a ser iluminado el cuerpo y el surgimiento de corriente, no transcurre un tiempo apreciable.*

Posteriormente, Stolietov estudió el efecto fotoeléctrico colocando en el vacío la lámina por iluminar (fig. 4.3).

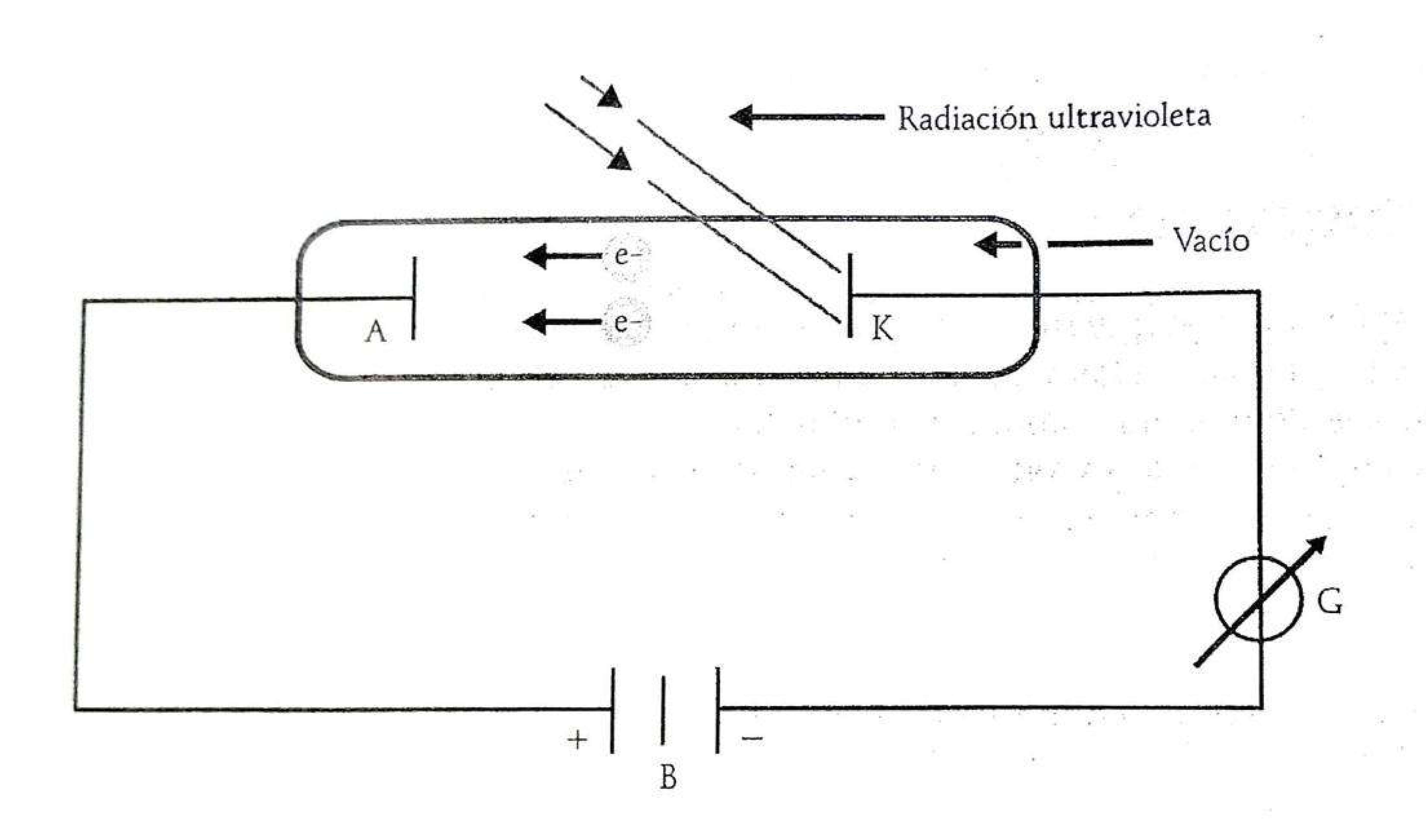


Figura 4.3. Montaje experimental usado por Stolietov en el efecto fotoeléctrico.

La demostración directa de que la luz provoca el desprendimiento de electrones en los cuerpos se debe a A. F. Ioffe.

Véase ahora el procedimiento para medir el número de electrones que se desprenden de la lámina iluminada y la velocidad de los mismos. Cuando la composición y potencia de las radiaciones permanecen constantes, se observa la siguiente dependencia:

$$I = f(V_1 - V_2) = f(V),$$

donde V es el potencial acelerador. Cuando V aumenta, también aumenta la fuerza de la corriente I, pudiendo llegar hasta la saturación. Cuando el potencial V toma valores de retardo, la corriente disminuye y puede llegar a desaparecer cuando el potencial toma el valor V_R (fig. 4.4).

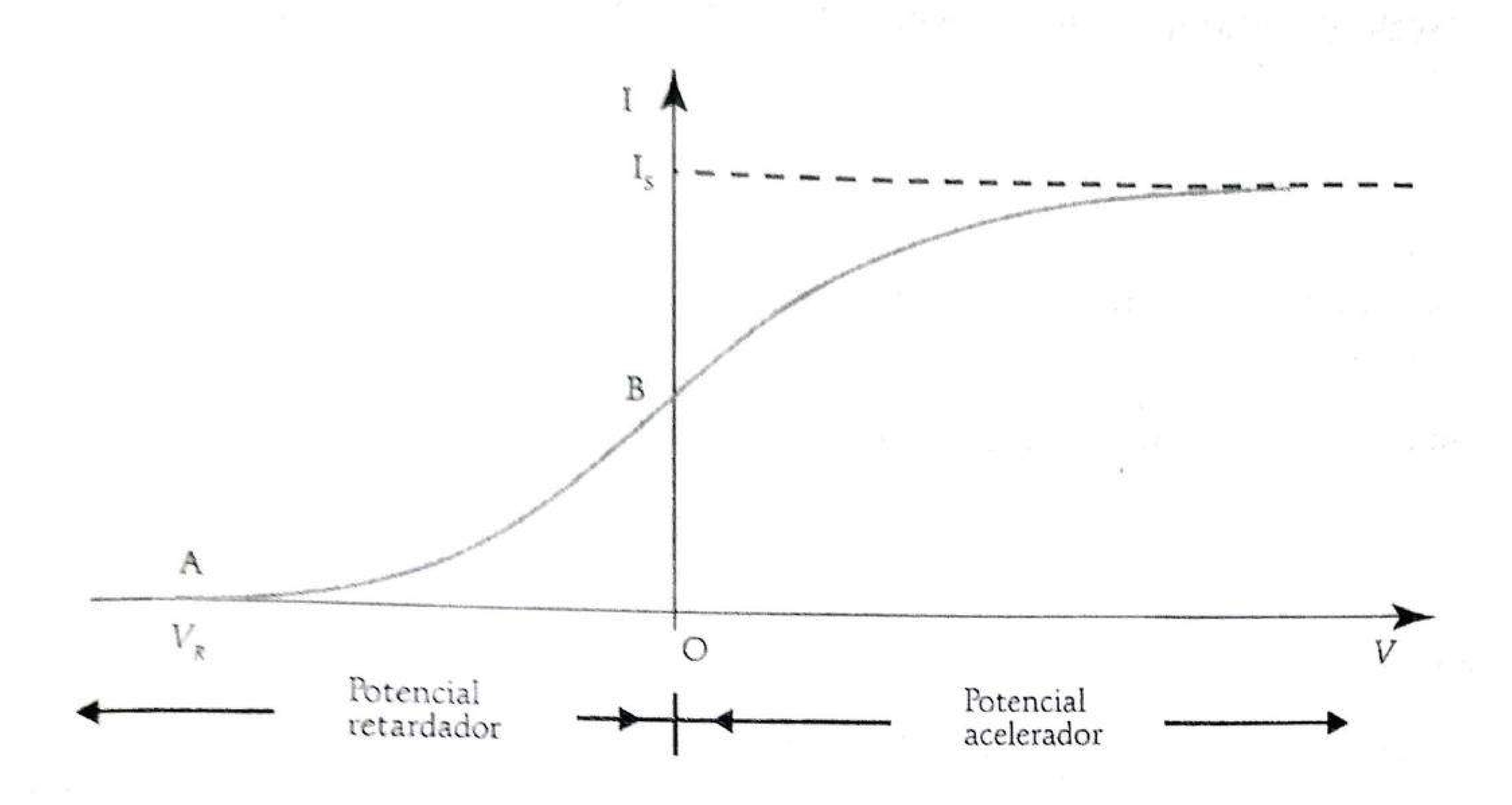


Figura 4.4. Dependencia de la fotocorriente respecto del voltaje aplicado. Durante la saturación todos los electrones arrancados al cátodo K (placa cargada negativamente) llegan al ánodo A (placa cargada positivamente).

Se puede afirmar que la corriente de saturación es igual a:

$$I_S = ne,$$

donde n es el número de electrones arrancados por unidad de tiempo. Ahora, de acuerdo con la tercera conclusión de Stolietov,

$$n \approx W,$$

donde W es la potencia de la radiación incidente.

La curva AB indica que los electrones arrancados del cuerpo por la luz, poseen una determinada velocidad inicial.

Estos electrones dejan de llegar a A cuando el trabajo del potencial retardador eV_R se iguala a su energía cinética E_c inicial; es decir,

$$eV_R = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4.8}$$

Desde el experimento se obtiene que:

$$V_R = \kappa f - V_0 \tag{4.9}$$

donde f es la frecuencia, κ y V_0 son constantes y además κ no depende del tipo de material.

Si se despeja V_R desde (4.8) y se sustituye posteriormente en (4.9), se tiene que:

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\kappa f - eV_0 \qquad (4.10)$$

es decir, la energía cinética inicial E_0 de los electrones aumenta linealmente con la frecuencia f de la luz incidente.

Desde (4.10) se tiene también que, para que los electrones puedan ser arrancados por la luz incidente, la frecuencia f debe satisfacer la desigualdad

$$f \leq \frac{V_0}{\kappa}$$

De esta manera,

$$f_0 = \frac{V_0}{\kappa}$$

será la **frecuencia umbral** o **umbral fotoeléctrico**.

Sólo la luz cuya longitud de onda satisface la desigualdad

$$\lambda < \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{c\kappa}{V_0},$$

puede producir efecto fotoeléctrico. Para distintos cuerpos λ_0 posee diferentes valores, con la particularidad de que para la mayoría de ellos, ésta corresponde a la región ultravioleta. Con esto se confirma la segunda característica del efecto fotoeléctrico. El valor de λ_0 depende del grado de lisura de la superficie y de los gases absorbidos.

Stolietov estableció la cuarta deducción con una precisión de hasta una milésima de segundo. Los experimentos llevados a cabo últimamente indican que el tiempo que transcurre desde el comienzo de la iluminación hasta el surgimiento de la corriente fotoeléctrica no es mayor de 10^{-9} s.

4.3. FÓRMULA DE EINSTEIN Y SU COMPROBACIÓN

Las leyes experimentales que rigen el efecto fotoeléctrico están en contraposición con los postulados fundamentales de la teoría ondulatoria de la luz.

Al incidir una onda luminosa sobre un conjunto de átomos, produce en éstos vibraciones forzadas de amplitud proporcional a las amplitudes de las ondas incidentes.

La velocidad de los electrones arrancados deberá depender de la amplitud de la luz incidente. Como se sabe, la amplitud de las ondas luminosas determina la potencia de su flujo y, por tanto, la velocidad de los electrones desprendidos deberá aumentar conforme aumenta la intensidad de la luz incidente. En realidad, esto no ocurre así. Al aumentar la potencia incidente W, lo que aumenta es el número de electrones

que se desprenden. La velocidad de éstos depende exclusivamente de la frecuencia f de la luz, con la particularidad de que para todas las sustancias, la energía de los electrones desprendidos (**fotoelectrones**) aumenta linealmente con la frecuencia. Esta dependencia es imposible de explicar desde el punto de vista ondulatorio, a no ser que se recurra a hipótesis artificiales.

Einstein [3] demostró en 1905 que todas las regularidades fundamentales del efecto fotoeléctrico se explican directamente, si se admite que la luz es absorbida en las mismas porciones (cuantos) de energía $E = hf$ con que ésta es emitida, según las ideas propuestas por M. Planck.

Al arrancar un electrón de un cuerpo sólido, la energía de la luz se gasta en:

1. *El trabajo necesario para arrancar el electrón (A), es decir, para romper su enlace con el átomo.*
2. *Comunicarle a dicho electrón una cierta energía cinética* $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

Si la porción de energía absorbida al desprenderse un electrón es igual a hf, de acuerdo con la ley de conservación de la energía se tendrá que:

$$hf = \frac{1}{2}mv^2 + A \qquad (4.11)$$

Esta última expresión es denominada **fórmula de Einstein para el efecto fotoeléctrico.**

La energía cinética puede expresarse por medio del trabajo del campo retardador eV_R [véase la ecuación (4.8)]. Entonces, desde la última expresión se tiene:

$$hf = eV_R + A \qquad (4.12)$$

o

$$V_R = \frac{hf}{e} - \frac{A}{e} \qquad (4.13)$$

Al comparar enseguida esta expresión con la (4.9), se observa que el hecho de que la energía cinética de los fotoelectrones sea función lineal de la frecuencia f, se deduce directamente de la hipótesis sobre la absorción de luz en porciones (cuantos) de energía $E = hf$. Con la misma naturalidad se explica la proporcionalidad existente entre la corriente de saturación I y la potencia W de la luz incidente. Al aumentar la potencia total W del flujo luminoso, aumenta también el número de porciones de energía $E = hf$ y, por tanto, el número de electrones arrancados por unidad de tiempo.

Puesto que:

$$I_s \sim n,$$

está claro entonces que:

$$I_s \sim W$$

La fórmula de Einstein puede someterse a comprobación experimental. Si se comparan (4.13) y (4.9), se sigue que:

$$h = e\kappa \qquad (4.14)$$

Tabla 4.1. Función de trabajo para algunos materiales.

Elemento	*Función de trabajo*	*Elemento*	*Función de trabajo*
Aluminio	4.3 eV	Níquel	5.1 eV
Carbono	5.0 eV	Silicón	4.8 eV
Cobre	4.7 eV	Plata	4.3 eV
Oro	5.1 eV	Sodio	2.7 eV

Si κ es determinado desde el experimento, y si se conoce además la magnitud de la carga del electrón, puede comprobarse si el producto $e\kappa$ coincide con el valor conocido de h.

Ya se ha indicado acerca de la dificultad empírica que surge cuando se intenta poner de acuerdo con la teoría ondulatoria de la luz, la dependencia empírica que existe entre la velocidad del fotoelectrón y la frecuencia incidente.

La incapacidad de explicar por completo la naturaleza de la luz a partir de la hipótesis ondulatoria, es más notoria aun si se presta atención a que no existe un tiempo de retardo sensible desde que comienza la iluminación del cuerpo hasta el momento en que aparecen los primeros fotoelectrones. Hay que señalar que cuando la iluminación es muy débil, el tiempo necesario para que un átomo acumule la cantidad de energía $E = hf$ necesaria para que se desprenda un electrón, puede ser bastante grande.

Efectivamente, cuando la energía es transportada por ondas, se distribuye (si la amplitud es constante) con igual densidad a lo largo de todo el frente de onda. Supóngase que en su recorrido la onda electromagnética encuentra un oscilador. Entonces, la energía que este oscilador absorbe es igual a la cantidad de energía transportada a través de un elemento de superficie de área $\Delta s = \lambda^2$.

Ahora, se calculará el intervalo de tiempo durante el que deberá incidir una radiación de potencia dada sobre un átomo, para que éste pueda acumular la energía suficiente y después arrojar un electrón con una energía hf.

Sea que U es la densidad del flujo de energía luminosa, es decir, la cantidad de energía transportada a través de la unidad de superficie por unidad de tiempo. De acuerdo con lo dicho, el átomo absorberá durante un tiempo t una energía igual a:

$$U \cdot \Delta s \cdot t = Ut\lambda^2$$

Para que a costa de esta energía pueda ser emitido un fotoelectrón, la misma tendrá que ser igual a:

$$\varepsilon = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

es decir, deberá cumplirse la igualdad

$$U\lambda^2 = \frac{hc}{\lambda},$$

de lo cual se tiene que:

$$t = \frac{hc}{U\lambda^3}$$

El efecto fotoeléctrico es fácil de observar cuando se tiene luz violeta: $\lambda = 4000$ Å y $U = 10^{-6}$ erg/s cm²

Se obtiene entonces, que:

$$t = 50 \text{ min}$$

Este resultado contradice tajantemente al obtenido de manera experimental, el cual muestra que este tiempo deberá ser mucho menor.

En realidad, el número de electrones desprendidos durante un tiempo determinado posee una energía total igual a la cantidad total de energía luminosa que dio lugar al proceso fotoeléctrico.

En resumen, puede decirse que *el efecto fotoeléctrico se presenta como si la energía luminosa fuera transportada por partículas aisladas*. Si una de estas partículas *choca* con un átomo, le trasmite a éste toda la energía. Una hipótesis como ésta fue precisamente la que propuso Albert Einstein [3].

Ejemplo 4.2.1

En cierto experimento se detectó luz con longitud de onda de 3580 Å. Calcular la energía que porta cada cuanto de luz.

Solución. Desde (4.6) se sigue que la energía del cuanto de luz es:

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.625\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3\times10^{8}\,\text{m/s})}{3580\times10^{-10}\,\text{m}} = 5.55\times10^{-19}\,\text{J} = 3.47\text{ eV}$$

Ejemplo 4.2.2

Encontrar la función de trabajo para un cierto material, si se sabe que cuando incide luz ultravioleta (~4000 Å) los fotoelectrones adquieren una energía cinética de 2 eV.

Solución. De acuerdo con el planteamiento, la energía de cada cuanto de radiación incidente es:

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.625\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3\times10^{8}\,\text{m/s})}{4\times10^{-7}\,\text{m}} = 4.97\times10^{-19}\,\text{J} = 3.1\text{ eV}$$

Por eso, desde (4.11) se sigue que:

$$A = E_\gamma - E_c = (3.1 - 2)\text{eV} = 1.1\text{ eV}$$

Ejemplo 4.2.3

Encontrar la frecuencia umbral en el ejemplo (4.2.2).

Solución. De acuerdo con la sección 4.2. "Efecto fotoeléctrico", la frecuencia umbral corresponde a la producción de fotoelectrones sin energía cinética. Por eso, colocando $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0$ en la expresión (4.11) se tiene que:

$$hf = A,$$

de donde

$$f = \frac{A}{h} = \frac{1.1\ \text{eV}}{6.625 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = \frac{1.76 \times 10^{-19}\ \text{J}}{6.625 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 0.2656 \times 10^{15}\ \text{Hz}$$

Ejercicio 4.2.1

Encontrar el potencial retardador en el ejemplo (4.2.2).

Solución: 2 eV.

Ejercicio 4.2.2

La función de trabajo de cierto material es de 0.6 eV. Calcular el trabajo del potencial retardador si la radiación incidente es de 3800 Å de longitud de onda.

Solución: 2.6 eV.

4.4. ALGUNAS APLICACIONES DEL EFECTO FOTOELÉCTRICO

La influencia de la luz sobre una placa metálica, como ya se indicó antes, provoca el desprendimiento de electrones para producir así la *emisión fotoeléctrica*. Este fenómeno es denominado **efecto fotoeléctrico externo**.

Junto con éste se conoce y emplea en gran escala para fines prácticos, el llamado **efecto fotoeléctrico interno**, durante el cual, a diferencia del efecto externo, los electrones óptimamente excitados permanecen dentro del cuerpo iluminado sin alterar su neutralidad. No obstante, sí cambia la concentración de los portadores de carga o su movilidad, lo cual conduce a la variación de las propiedades eléctricas de los materiales.

El efecto fotoeléctrico interno es propio de los dieléctricos y semiconductores. En particular, este efecto es revelado por la variación de la conductividad de los semiconductores homogéneos al iluminarles. Basándose en este fenómeno ha sido creada la *fotoconductividad* y se perfecciona constantemente todo un grupo de receptores de luz: células fotorresistentes, las cuales se componen principalmente de selenuro y de sulfuro de cadmio.

En los semiconductores heterogéneos, además de la variación de la conductividad, se observa también el surgimiento de una diferencia de potencial (fuerza electromotriz). Este fenómeno (efecto fotogalvánico) tiene lugar gracias a que la conductividad unilateral de los semiconductores provoca la separación espacial (en el volumen del conductor) de los portadores de carga. Entre éstos se encuentran

los electrones ópticamente excitados que portan carga negativa y de las microzonas (huecos) que surgen en la proximidad inmediata de los átomos (de los cuales fueron separados los electrones), y que se comportan como partículas dotadas de una carga elemental positiva. Los electrones y los huecos se concentran en los extremos correspondientes del semiconductor. De ello resulta una fuerza electromotriz merced a la cual, sin aplicar una fuerza electromotriz externa, se genera corriente en una resistencia conectada en paralelo al semiconductor iluminado. De esta manera, se consigue transformar directamente la energía luminosa en energía eléctrica. Precisamente por esto, los receptores fotogalvánicos son empleados no sólo para registrar las señales luminosas, sino también en los circuitos eléctricos como fuentes de energía eléctrica.

Los principales tipos de receptores fotogalvánicos se fabrican industrialmente sobre la base de selenio y sulfuro de plata. También están muy difundidos el silicio, el germanio y diversos compuestos.

Los elementos fotogalvánicos utilizados para transformar la energía solar en energía eléctrica, han adquirido gran divulgación, sobre todo en los vuelos cósmicos en calidad de fuentes alimentadoras de a bordo.

Con base en el efecto fotoeléctrico interno y externo, se fabrica actualmente un gran número de receptores de radiación, transformadores de la señal luminosa en señal eléctrica, todos conocidos con el nombre común de *células fotoeléctricas*. Éstas poseen gran aplicación en la técnica y en investigaciones científicas. Las más diversas mediciones ópticas son inconcebibles hoy día sin la utilización de uno u otro tipo de células fotoeléctricas. La fotometría moderna, el análisis espectral de los materiales, la medición de flujos luminosos muy débiles, etc., serían difícil de imaginar sin el uso de células fotoeléctricas. El registro de los espectros infrarrojos se efectúa a menudo mediante células fotoeléctricas especiales con régimen de trabajo en la zona de ondas largas del espectro. Las células fotoeléctricas se aplican mucho en el control y mando de procesos industriales, en los diversos medios de comunicación, desde la trasmisión de imagen y televisión hasta la comunicación óptica mediante rayos láser.

La fabricacion de células fotoeléctricas cuenta con más de 100 años. El primer elemento fotoeléctrico fue elaborado en 1875, y se basaba en el efecto fotoeléctrico interno que aprovechaba la fotoconductividad. La primera célula fotoeléctrica de vacío basada en el efecto externo, fue fabricada en 1889.

Es interesante señalar que las células fotoeléctricas que utilizan el fotoefecto externo, fueron las primeras en obtener amplio desarrollo industrial, pese a que el efecto fotoeléctrico interno fue descubierto por lo menos 50 años antes. Sólo en los años cuarenta del siglo XX, gracias al impetuoso desarrollo de la física de semiconductores y al estudio detallado del fotoefecto interno, se inició la creación de nuevas células fotoeléctricas sobre la base de materiales semiconductores (véanse figs. 4.5 y 4.6).

Entre los usos más comunes de las células fotoeléctricas, pueden citarse el registro y medición de los flujos luminosos, la señalización luminosa, la televisión, el cine sonoro, etcétera.

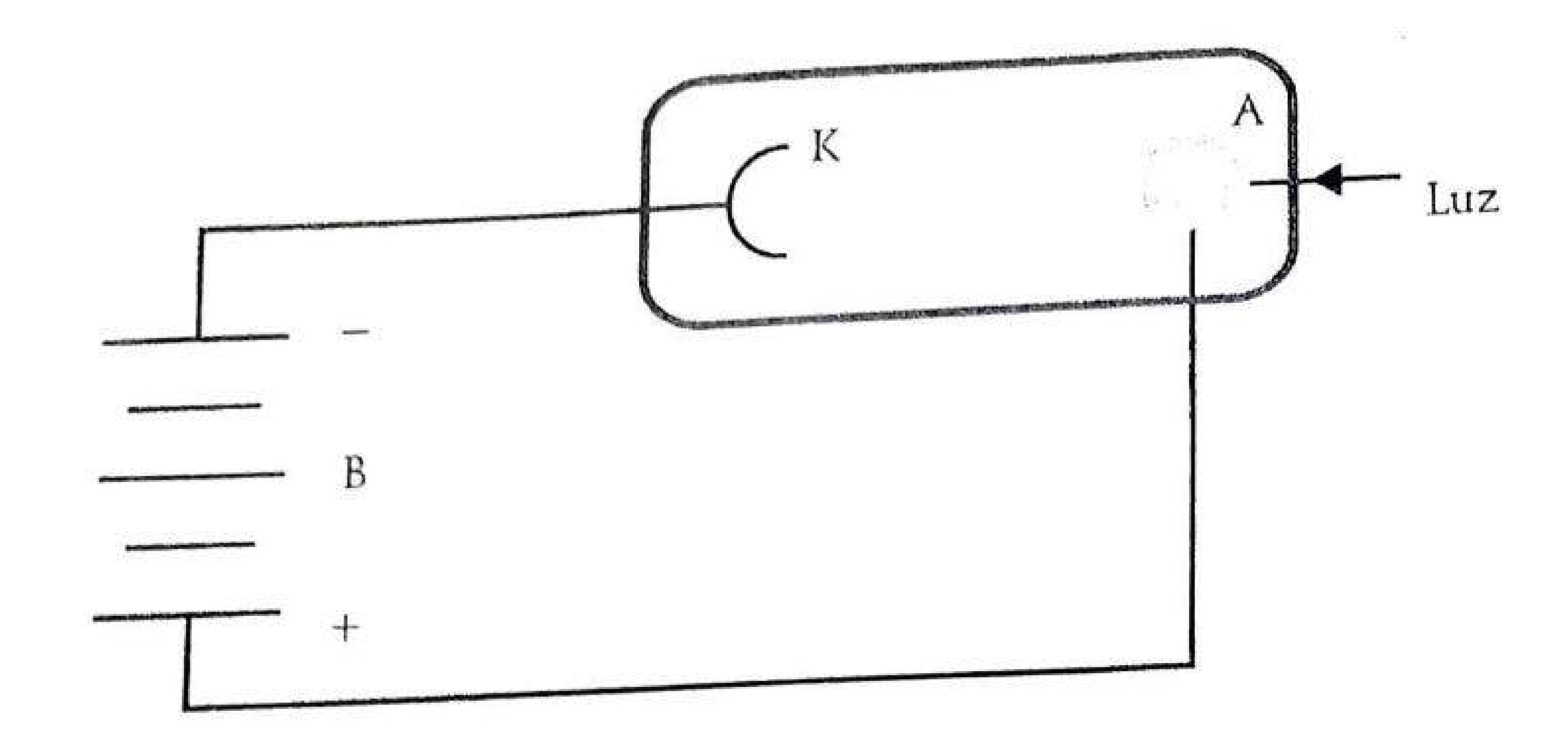


Figura 4.5. Célula fotoeléctrica de vacío o tubo fotoeléctrico.

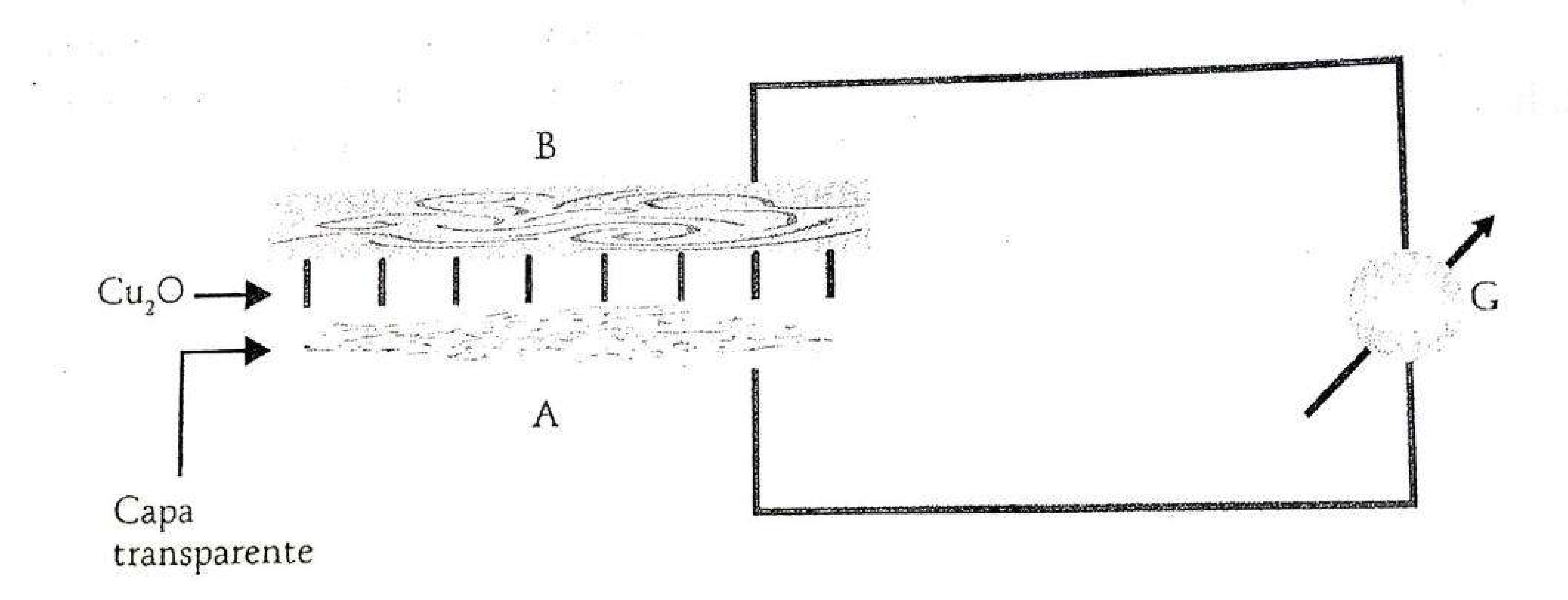


Figura 4.6. Células fotoeléctricas sólidas con capa de barrera, también llamadas *células fotovoltaicas* o *fotónicas*. Las láminas A y B son de cobre y oro u otro material.

4.5. DIFUSIÓN DE LOS RAYOS X

En 1895, Roentgen descubrió ciertos rayos que se producen cuando un flujo de electrones rápidos choca con cuerpos sólidos. Estos rayos no se ven a simple vista pero tienen la propiedad de provocar fluorescencia visible en muchos cuerpos sólidos, como en la blenda de zinc, y de influir sobre las placas fotoeléctricas, etcétera.

Actualmente, para producir los rayos X o Roentgen se utilizan tubos de vacío en los que la fuente de electrones es un cátodo caliente K. Frente a este cátodo se coloca un cuerpo sólido macizo A llamado anticátodo en el cual chocan los electrones (fig. 4.7).

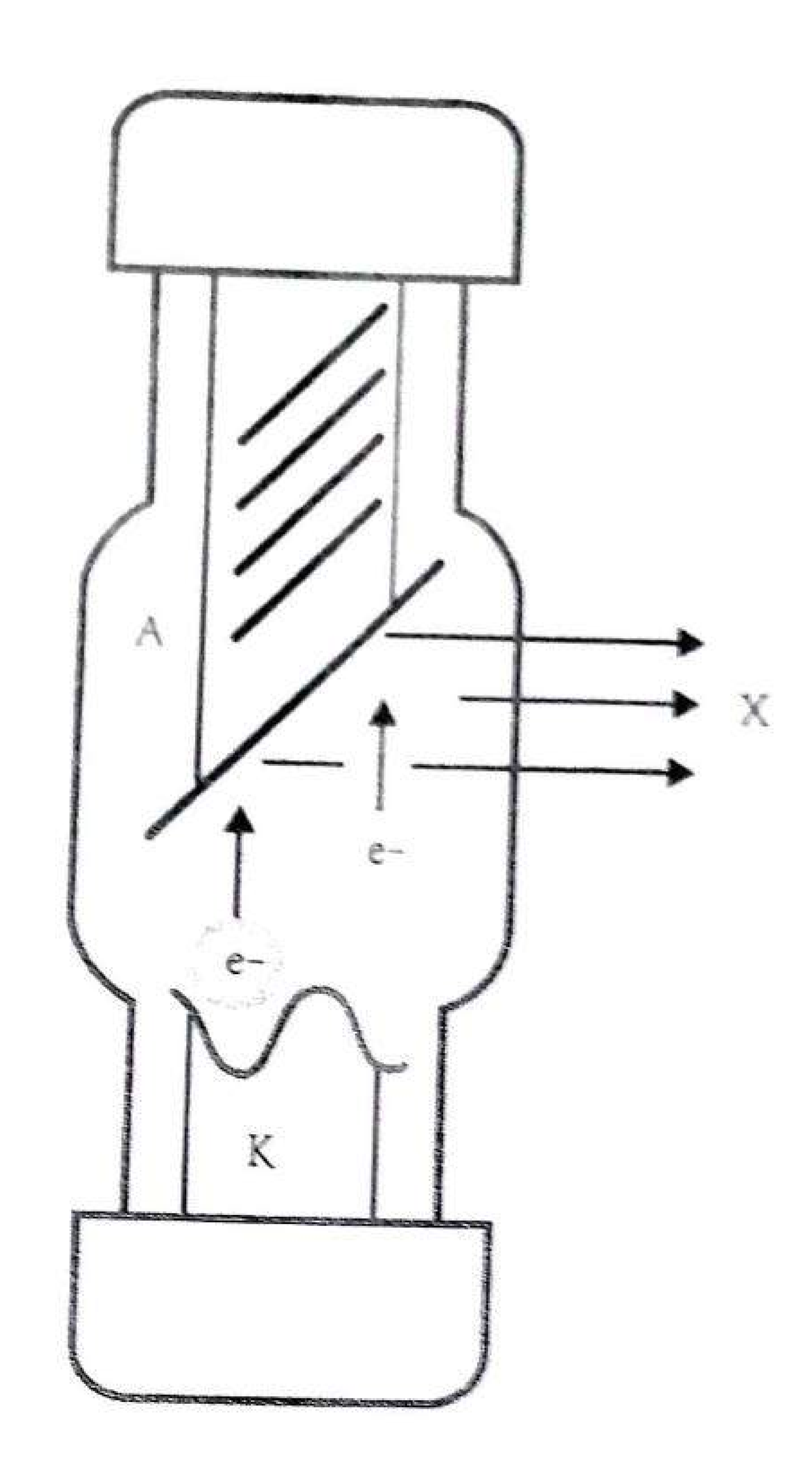


Figura 4.7. Tubo de rayos Roentgen.

Para comunicar a los electrones la velocidad necesaria entre K y A se aplica una diferencia de potencial $V_1 - V_2$ del orden de varias decenas de miles de volts. La superficie de A es la que sirve de fuente de rayos X.

Estos rayos tienen gran poder de penetración y son emitidos por los electrones de las capas internas de los átomos, mientras que los rayos visibles, los infrarrojos y los ultravioletas son emitidos por las capas externas de los átomos y de las moléculas y por estas mismas al girar u oscilar.

El campo de los rayos X en longitudes de onda está representado por la siguiente expresión:

$$\lambda_X \in [10^{-10}, 10^{-6}] \text{ cm}$$

El campo de los rayos X de onda larga se superpone al de los ultravioletas y entra en la región en que son intensamente absorbidos por las sustancias. Por el contrario, los rayos X de onda corta casi no son absorbidos.

Los rayos X son de naturaleza ondulatoria, al igual que los visibles, y producen espectros continuos y de rayas. La naturaleza ondulatoria de los rayos X fue demostrada directamente en 1912, cuando Laue expuso la idea de que la difracción de dichos rayos podía observarse utilizando la red espacial natural de los cristales.

La observación directa de fenómenos de interferencia de estos rayos sin utilizar cristales no se llevó a cabo sino hasta 1930, en que fue realizada por el físico de la antigua Unión Soviética, V. P. Linnik.

La posibilidad de observar la difracción de los rayos X a través de cristales, se basa en que la longitud de onda de los primeros y la constante de la red cristalina son magnitudes de un mismo orden ($\approx 10^{-8}$ cm). Por esto, cuando los rayos X atraviesan el cristal, se produce una difracción por red espacial [18].

Desde el punto de vista clásico, los rayos X son ondas electromagnéticas capaces de provocar en los átomos oscilaciones forzadas de los electrones. Por esto, podía esperarse que la difusión de los rayos X estuviese sujeta a las mismas leyes que la difusión clásica de los rayos visibles de las cuales se deduce que:

1. *Con la difusión no varía la longitud de onda* λ.
2. *La indicatriz de la difusión viene dada por la correlación:*

$$I = I_0(1 + \cos^2 \varphi) \tag{4.15}$$

donde φ *es el ángulo comprendido entre la dirección de los rayos primarios y difundidos.*

La comprobación experimental demuestra que la correlación (4.15) sólo se cumple exactamente para los rayos X cuyas longitudes de onda λ son largas; cuando sus longitudes de onda λ son cortas, se observa una discrepancia con respecto a la correlación señalada.

Por la variación que experimenta el coeficiente de absorción, pudo llegarse a la conclusión de que la longitud de onda de los rayos X de onda corta varía al producirse su difusión. Además, se observa una discrepancia sensible con respecto a la variación que podía esperarse del coeficiente K en función del número de electrones difundidos. El coeficiente de difusión K de los rayos X deberá ser proporcional al número de electrones difusores contenidos en la unidad de volumen de la sustancia. Como:

$$n_e = Zn_0,$$

donde Z es el número de electrones que hay en un átomo y n es el número de átomos que hay en la unidad de volumen, se tiene que:

$$K \approx Zn_0 \tag{4.16}$$

La densidad n_0 puede expresarse mediante la densidad ρ de la sustancia, su peso atómico A y el número de Avogadro N por la siguiente relación de proporcionalidad:

$$n_0 \approx N\frac{\rho}{A}$$

Al sustituir esta expresión para n_0 en (4.16), se encuentra que:

$$\frac{K}{\rho} \approx \frac{NZ}{A} \tag{4.17}$$

Puesto que para todos los átomos la relación $\frac{Z}{A}$ es aproximadamente igual a $\frac{1}{2}$, de (4.17) se infiere que $\frac{K}{\rho}$ deberá ser aproximadamente constante para todas las sustancias y para todas las longitudes de onda. Esta última conclusión no se cumple, ya que, como se observa, la relación $\frac{K}{\rho}$ aumenta considerablemente al aumentar la longitud de onda. Estas discrepancias de la difusión de los rayos X con las regularidades que eran de esperarse hicieron necesaria la continuación de las observaciones experimentales. En los años de 1922 a 1923, valiéndose de un espectrógrafo de rayos X, A. Compton estudió la composición espectral de éstos.

4.6. EFECTO COMPTON

El esquema del experimento de Compton es mostrado en la figura 4.8, en la que R es un tubo de rayos X, A es un trozo de sustancia difusora, y B_1B_1' y B_2B_2' es un sistema de diafragmas que deja pasar un solo haz estrecho de rayos difusos. Este haz incide posteriormente sobre el espectrógrafo de rayos X al cual pertenece el cristal C y la cámara de ionización D. Lo primero que se descubrió fue que en la radiación difusa existían rayos de longitud de onda λ igual a la de los rayos primarios y rayos cuya longitud de onda era $\lambda' > \lambda$. De esta forma, resultó que junto a la difusión clásica en que no varía la longitud de onda, existe una difusión en que la longitud de onda está desplazada hacia el infrarrojo. Este nuevo tipo de difusión recibió el nombre de **efecto Compton**.

Observaciones posteriores pusieron de manifiesto que la difusión Compton está sometida a las siguientes reglas:

1. *Esta difusión es intensa para las sustancias con peso atómico pequeño, y débil para las que tienen peso atómico grande.*
2. *Al aumentar el ángulo de difusión, se incrementa la intensidad de la difusión Compton, lo cual es inverso a la difusión clásica.*

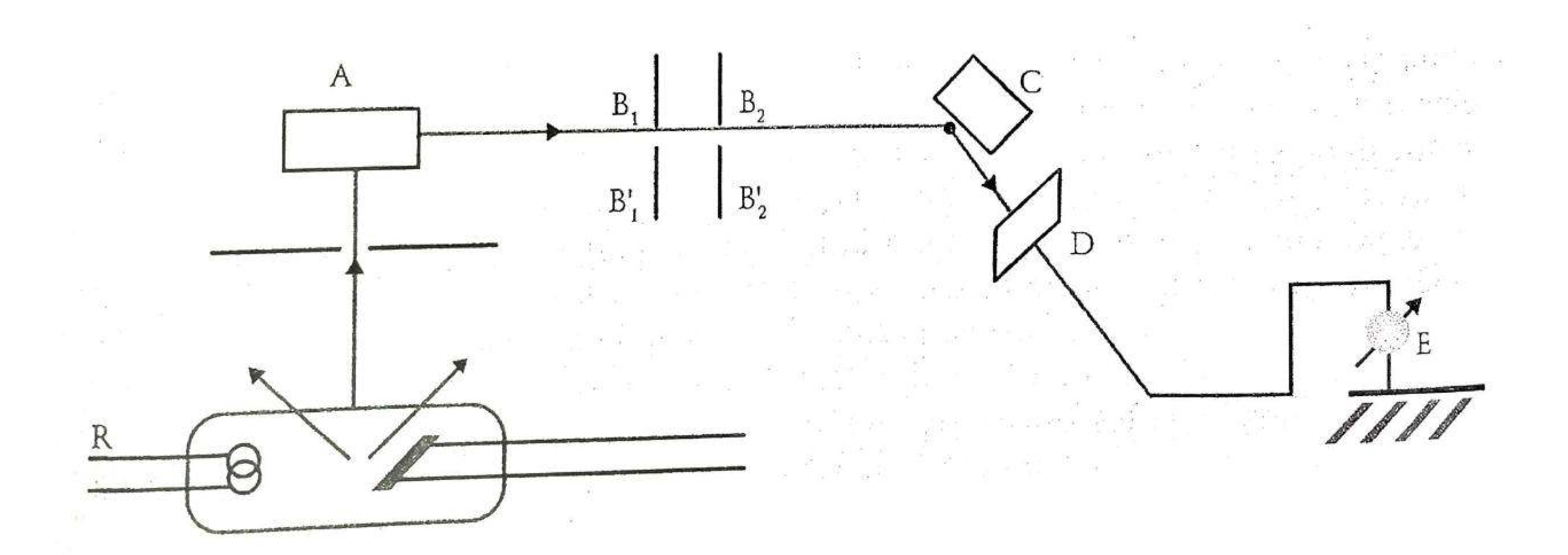


Figura 4.8. Diagrama para la observación del efecto Compton.

3. *El desplazamiento de la longitud de onda depende del ángulo de difusión, con la particularidad de que aumenta al incrementarse dicho ángulo.*
4. *A iguales ángulos de difusión, les corresponde una misma magnitud del desplazamiento de las longitudes de onda, cualesquiera que sean las sustancias difusoras.*

El hecho de que la magnitud del desplazamiento no dependa de la sustancia difusora, demuestra que el mecanismo de la difusión Compton no guarda relación alguna con las propiedades individuales de los átomos. Efectivamente, el efecto Compton puede explicarse suponiendo que se realiza a costa de los electrones débilmente ligados a los átomos. Esta suposición también está de acuerdo con el hecho de que los elementos ligeros producen un desplazamiento de los rayos relativamente mayor que los elementos pesados. En los átomos ligeros todos los electrones están débilmente unidos, mientras que en los átomos pesados sólo están débilmente ligados los electrones externos. Por esto, en el caso de elementos pesados el número relativo de electrones que producen el efecto Compton es menor que cuando se trata de elementos ligeros.

El efecto Compton puede explicarse cuantitativamente acorde con los datos experimentales, siempre que se acepte el punto de vista según el cual, la luz es un flujo de fotones o partículas que poseen una energía $E_\phi = h\mathrm{f}$ y una cantidad de movimiento $P_\phi = \frac{h\mathrm{f}}{c}$. El choque de estas partículas-fotones con los electrones libres es de tipo elástico, lo cual da lugar al surgimiento de rayos difusos. Como quiera que al chocar un fotón con un electrón, una parte de la energía del primero se trasmite al segundo, la energía del fotón difuso E'_ϕ será menor que la del fotón-incidente: $E'_\phi < E_\phi$. La frecuencia f' del fotón difuso está relacionada con su energía:

$$h\mathrm{f}' = E'_\phi,$$

de donde conforme a la desigualdad $E'_\phi < E_\phi$ se obtiene que:

$$\mathrm{f}' < \mathrm{f} \quad \text{o} \quad \lambda' > \lambda$$

De esta manera, la longitud de onda de los rayos difundidos durante el efecto Compton deberá ser mayor que la de los rayos incidentes.

La hipótesis de que el efecto Compton se debe al choque elástico de un fotón con un electrón libre (o cuyo enlace con el átomo es muy débil), no sólo conduce al hecho de que debe surgir un fotón de difusión con menor frecuencia, sino que también al producirse el choque, una parte de la energía del fotón incidente se trasmite al electrón y, por consiguiente, este último adquiere cierta cantidad de movimiento. De esta manera, junto a los rayos difusos que tienen desplazada la longitud de onda, aparecen electrones acelerados llamados electrones de retroceso.

Si la energía del fotón incidente es $E_\phi = h\mathrm{f}$ y la ley del fotón difuso $E'_\phi = h\mathrm{f}'$ se tiene que de acuerdo con la ley de conservación de la energía, la energía E_e adquirida por el electrón estará expresada por la igualdad:

$$E_e = E_\phi - E'_\phi = h\,(\mathrm{f} - \mathrm{f}')$$

Desde esta última se encuentra que la razón de la energía del electrón de retroceso E_e a la energía del fotón incidente será:

$$\frac{E_e}{hf} = \frac{f - f'}{f} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}$$

Ahora, se obtendrán las expresiones más importantes que describen el efecto Compton. Para esto, se supondrá que la interacción entre el fotón y el electrón se desarrolla de acuerdo con las leyes del choque elástico y serán escritas las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. Como quiera que la velocidad de los electrones de retroceso es muy grande, hay que aplicar las fórmulas de la mecánica relativista. Para la energía cinética y para el vector de momentum del electrón se tiene que:

$$E_e = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 \tag{4.18}$$

$$\vec{P}_e = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\vec{v} \tag{4.19}$$

donde $\beta = \frac{v}{c}$, c es la velocidad de la luz en el vacío, v es la velocidad del electrón respecto de un sistema inmóvil de referencia, m_0 es la masa en reposo del electrón y m su masa medida en dicho sistema inmóvil de referencia.

Al electrón en reposo hay que adjudicarle una energía igual a m_0c^2. Considerando esto para la ley de conservación de la energía se tiene:

$$hf + m_0c^2 = hf' + mc^2 \tag{4.20}$$

El momentum del electrón en reposo es según (4.19) igual a cero. Por esto, para la ley de conservación del momentum en forma vectorial se tendrá:

$$\vec{P}_\phi = \vec{P}'_\phi + m\vec{v} \tag{4.21}$$

Para escribir la expresión vectorial (4.21) en la forma algebraica, se partirá del hecho de que el vector $\vec{P}_\phi$ es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\vec{P}'_\phi$ y $m\vec{v}$ (fig. 4.9).

Los ángulos φ y ψ representan, respectivamente, los ángulos bajo los cuales tienen lugar la difusión del fotón y el movimiento del electrón de retroceso. De acuerdo con la figura 4.9 y el teorema de los cosenos, se tiene:

$$(mv)^2 = P^2 = P_\phi^2 + P_\phi'^2 - 2P_\phi P'_\phi \cos\varphi$$

Al sustituir en esta última expresión los valores de $P_\phi = \frac{hf}{c}$ y de $P' = \frac{hf'}{c}$ y luego de multiplicar los dos términos de la igualdad por c se encuentra que:

$$m^2v^2c^2 = h^2f^2 + h^2f'^2 - 2h^2ff'\cos\varphi \tag{4.22}$$

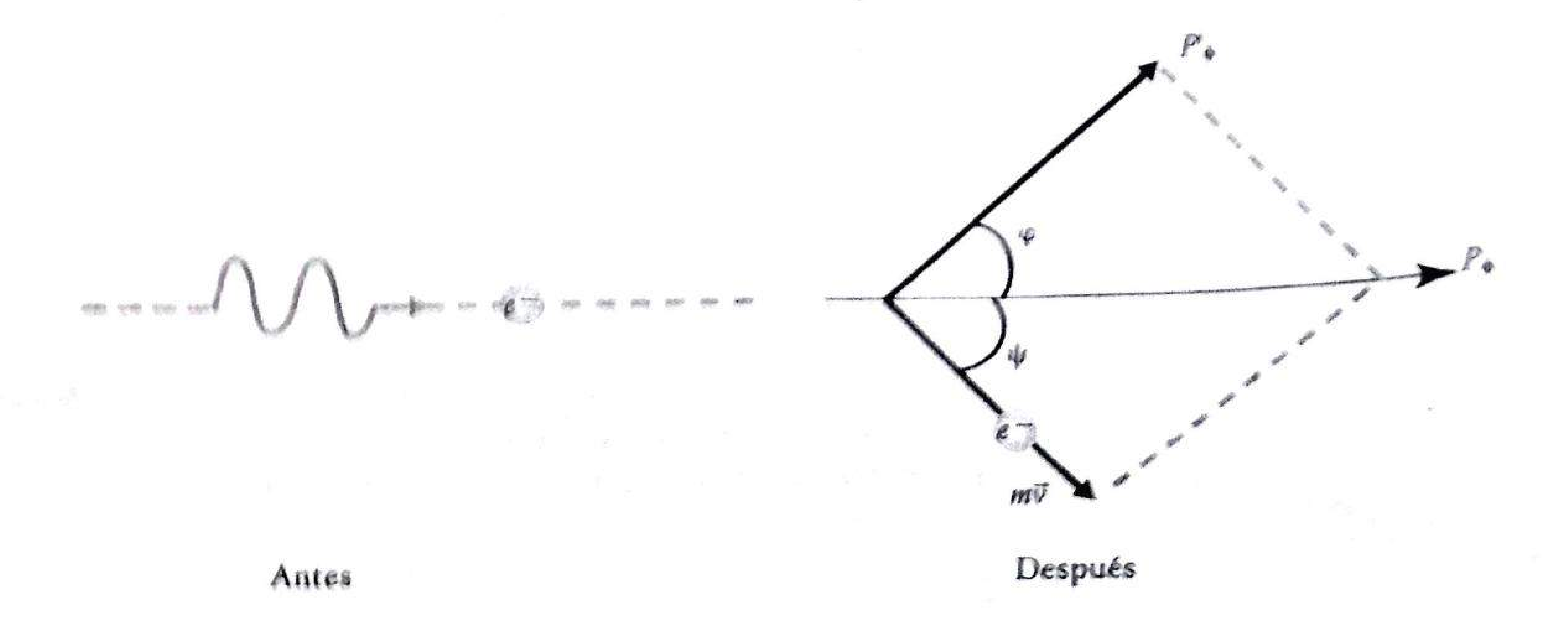


Figura 4.9. Efecto Compton: cálculo de la frecuencia del fotón difuso.

Por la ley de conservación de la energía (4.20) se tiene que:

$$mc^2 = hf - hf' + m_0c^2,$$

en donde al elevar al cuadrado los dos términos de esta igualdad se obtiene:

$$m^2c^4 = h^2f^2 - h^2f'^2 - 2h^2ff' + 2h(f - f')m_0c^2 + m_0^2c^4 \quad (4.23)$$

Si se resta de (4.23) la igualdad (4.22), se encuentra que:

$$m^2c^4(1-\beta^2) = 2h(f-f')m_0c^2 - 2h^2ff'(1-\cos\varphi) + m_0^2c^4$$

Al aplicar enseguida la relación existente entre la masa en reposo m_0 y la masa m:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

se puede escribir la penúltima expresión de la forma siguiente:

$$2h(f-f')m_0c^2 = 2h^2ff'(1-\cos\varphi),$$

o

$$\frac{c}{f'} - \frac{c}{f} = \frac{h(1-\cos\varphi)}{m_0c} \quad (4.24)$$

Si se sustituye en esta igualdad la identidad trigonométrica

$$1-\cos\varphi = 2\,\text{sen}^2\frac{\varphi}{2},$$

y se considera que

$$\frac{c}{\text{f}} = \lambda, \quad \frac{c}{\text{f}'} = \lambda'$$

se obtiene:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c\,\text{sen}^2\frac{\varphi}{2} \tag{4.25}$$

donde $\lambda_c = \dfrac{h}{m_0 c} = 0.02426$ Å suele denominarse **longitud de onda Compton.**

Enseguida, hay que determinar el ángulo ψ bajo el cual está dirigido el movimiento del electrón de retroceso. En la figura 4.9 se observa que:

$$\tan\psi = \frac{P'_\phi\,\text{sen}\,\varphi}{P_\phi - P'_\phi\cos\varphi} = \frac{\text{f}'\,\text{sen}\,\varphi}{\text{f} - \text{f}'\cos\varphi} = 2\left(\frac{\text{sen}\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{\dfrac{\text{f}}{\text{f}'} - \cos\varphi}\right) \tag{4.26}$$

Por otra parte, al basarse en la igualdad (4.24), se tiene que:

$$\frac{\text{f}}{\text{f}'} - \cos\varphi = 1 - \cos\varphi + 2\frac{\text{f}}{c}\lambda_c\text{sen}^2\frac{\varphi}{2} = 2\left(1 + \frac{\text{f}}{c}\lambda_c\right)\text{sen}^2\frac{\varphi}{2}$$

Al sustituir esto último en (4.26) se sigue que:

$$\tan\psi = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\text{f}}{c}\lambda_c\right)\tan\dfrac{\varphi}{2}} \tag{4.27}$$

Esta última expresión permite encontrar el valor del ángulo ψ, es decir, la dirección que sigue el electrón de retroceso, siempre que se conozca la dirección del fotón difundido dada por φ.

Puesto que λ_c se expresa únicamente mediante constantes universales, entonces se obtiene que independientemente de la naturaleza de la sustancia difusora, la raya de la difusión Compton estará desplazada respecto de la incidente en una magnitud igual a:

$$\Delta\lambda = 0.0486\,\text{sen}^2\frac{\varphi}{2}\text{ Å} \tag{4.28}$$

El valor máximo de desplazamiento lo alcanzan los rayos difundidos en un ángulo $\varphi = \pi$, es decir, en sentido opuesto a la dirección del haz de rayos incidentes. Los datos experimentales confirman esta última fórmula con bastante exactitud.

Al sustituir enseguida (4.25) en la expresión para la razón de la energía del electrón de retroceso a la energía del fotón incidente, se obtiene que:

$$\frac{E_e}{hf} = \frac{2\lambda_c \operatorname{sen}^2 \dfrac{\varphi}{2}}{\lambda + 2\lambda_c \operatorname{sen}^2 \dfrac{\varphi}{2}} \tag{4.29}$$

De esta última relación se observa que al variar el ángulo de difusión φ, cambia la energía de los electrones de retroceso y, por consiguiente, sus velocidades.

Ejemplo 4.6.1

Durante una práctica con dispersión Compton con electrones, se observa que el desplazamiento de las rayas es de 0.01214 Å. Encuentre la dirección del fotón difuso.

Solución. Según el planteamiento,

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = 0.01214 \text{ Å},$$

y además, ya sabemos que para el electrón $\lambda_C = 0.02426$ Å.
Ahora bien, desde la expresión (4.25) se tiene que

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_c}} = \sqrt{\frac{0.01214\text{Å}}{0.04852\text{Å}}} = 0.5$$

Por tanto, $\varphi = 15°$.

Ejemplo 4.6.2

Si la longitud de onda de la radiación incidente en el ejemplo anterior es de 3200 Å, calcule la energía del fotón difuso.

Solución. Puesto que $\lambda' - \lambda = 0.01214$ Å, entonces

$$\lambda' - \lambda + 0.01214 \text{ Å} = 3200.01214 \text{ Å},$$

por tanto, la energía del fotón difuso es:

$$E_\gamma = hf' = h\frac{c}{\lambda'} = \frac{(6.625 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{3200 \times 10^{-10} \text{ m}} = 3.8 \text{ eV}$$

Ejercicio 4.6.1

Durante la dispersión Compton con un electrón, se observa que el ángulo de dispersión del electrón de retroceso es de 30° y es la mitad del ángulo de dispersión del fotón difuso. Determine la longitud de onda de la radiación incidente.

Solución: 0.0121 Å.

5

Propiedades ondulatorias de las partículas

Pienso que puedo decir sin temor, que nadie entiende la mecánica cuántica.

RICHARD P. FEYNMAN

Ya es conocido que en los fenómenos ópticos, incluyendo la región de los rayos X, se descubre un dualismo muy especial. Además de las propiedades ondulatorias de la luz, tales como la interferencia y la difracción, se observan otras características que descubren directamente su naturaleza corpuscular (fotoefecto, efecto Compton, etc.).

Aunque no se pueda concebir de manera alguna el hecho de que un mismo objeto sea simultáneamente corpúsculo[1] y onda,[2] existe la necesidad de utilizar uno u otro cuadro para explicar toda la variedad de fenómenos ópticos. Es en estos últimos donde se manifiesta con más fuerza dicho dualismo asombroso, el cual tiene lugar también para partículas como los electrones, protones, átomos, etc. Existe una gran cantidad de experimentos que con toda evidencia muestran que estas partes elementales componentes de la sustancia, se comportan como entes localizados en el espacio. Al analizar los trazos dejados en las fotografías obtenidas en la cámara de Wilson, no hay la menor duda de que se trata de huellas de partículas-corpúsculos. Sin embargo, se verá que existen otros experimentos en los que las mismas *partículas* se comportan como ondas capaces de superponerse y provocar el fenómeno de interferencia.

[1] Se dice del comportamiento corpuscular de un objeto, cuando éste puede describirse satisfactoriamente mediante las leyes de la mecánica clásica. Por tanto, son características del mismo la masa, la posición, el momentum, etcétera.

[2] Se dice del comportamiento ondulatorio de un objeto, cuando éste puede describirse satisfactoriamente mediante las leyes de la teoría ondulatoria. Por tanto, son características del mismo la longitud de onda, la frecuencia, etcétera.